Dr. Gerhard Baur
B.Sc. Pascal Heiter

Universität Ulm
Analysis II
Wintersemester 2011/12

# Analysis II - Übungsblatt 5

(Abgabe: Mittwoch, 23. November 2011 vor der Übung.)

"Die erste Regel, an die man sich in der Mathematik halten muss, ist, exakt zu sein. Die zweite Regel ist, klar und deutlich zu sein und nach Möglichkeit einfach."
*- Lazare Nicolas Marguerite Carnot, 1753-1823, französischer Offizier, Mathematiker und Politiker.*

---

**Aufgabe 17** *(Konvergenzradius)* (3+3+3=9 Punkte)

Bestimmen Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihen

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k!\, x^k$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(x-1)^k\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k^k}.$

**Aufgabe 18** *(Konvergenzradius bei Differentiation und Integration)* (3+3+3=9 Punkte)

Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ habe den Konvergenzradius $r$.

(a) Zeigen Sie, dass die formal abgeleitete Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} ka_k(z-a)^{k-1}$$

ebenfalls den Konvergenzradius $r$ besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass die formal integrierte Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k+1}(z-a)^{k+1}$$

ebenfalls den Konvergenzradius $r$ besitzt.

(c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der *Lückenreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^{5k}.$$

**Aufgabe 19** *(Potenzreihenentwicklung)* (5 Punkte)

Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x)=\arctan x$$

in eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $a=0$ und bestimmen Sie den Konvergenzradius.
*Hinweis: Betrachte die Ableitung* $\frac{d}{dx}\arctan x$.

**Aufgabe 20** *(Gleichmäßige Konvergenz)* (7 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Folge der Partialsummen von

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k} \cos(kx)$$

gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$ gegen $f$ konvergiert und bestimmen Sie

$$\int_0^{\pi/2} f(x)\, dx.$$

**Aufgabe 21** *(Funktionenfolgen)* (10 Punkte)

Es sei die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$f_n(x) = e^{-nx} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

(a) Zeigen oder widerlegen Sie, dass $(f_n)$ auf $[0, \infty)$ gleichmäßig konvergiert.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie, dass $(f_n)$ auf $[\delta, \infty)$ mit $\delta > 0$ gleichmäßig konvergiert.

(c) Zeigen oder widerlegen Sie, dass $(f_n)$ auf $(0, \infty)$ gleichmäßig konvergiert.