Dr. Gerhard Baur
B.Sc. Pascal Heiter

Universität Ulm
Analysis II
Wintersemester 2011/12

# Analysis II - Übungsblatt 7

(Abgabe: Mittwoch, 7. Dezember 2011 vor der Übung.)

"Vergeßt nicht: Wenn ihr schwimmen lernen wollt, dann geht mutig ins Wasser, wenn ihr lernen wollt, Aufgaben zu lösen, dann löst sie." - *George Polya, 1887 - 1985, ungarischer Mathematiker.*

**Aufgabe 26** *(Binominalreihe)* (8 Punkte)

Berechnen Sie den Grenzwert von

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x^4)^7 - 1}{(\sqrt[3]{1+x^3}-1)(\sqrt{1+x}-1)}.$$

**Aufgabe 27** *(Punktarten)* (3+3+3=9 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils $\mathring{M}$, $\partial M$ und $\overline{M}$ von

(a) $M := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1 \right\}$,

(b) $M := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \le z \le x^2 + y^2 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$,

(c) $M \subset \mathbb{R}$ mit $M := \mathbb{Q}$.

**Aufgabe 28** *(Kugelkoordinaten)* (4+6=10 Punkte)

(a) Sei $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \cos\vartheta_0 \\ 2\sin t \cos\vartheta_0 \\ 2\sin\vartheta_0 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie festem } \vartheta_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Beschreiben Sie, was die Kurve $\gamma(t)$ darstellt und berechnen Sie die Bogenlänge von $\gamma$.

(b) Beschreiben Sie (verbal und/oder durch eine Skizze) folgende Flächen, wenn man jeweils eine Variable in der Kugelkoordinatendarstellung fixiert. Also

$$F_1 := \left\{ \begin{pmatrix} r_0\cos\varphi\cos\vartheta \\ r_0\sin\varphi\cos\vartheta \\ r_0\sin\vartheta \end{pmatrix} \ : \ -\pi \le \varphi \le \pi, -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2} \right\} \quad \text{mit } 0 \le r_0 < \infty \text{ fest,}$$

$$F_2 := \left\{ \begin{pmatrix} r\cos\varphi_0\cos\vartheta \\ r\sin\varphi_0\cos\vartheta \\ r\sin\vartheta \end{pmatrix} \ : \ 0 \le r < \infty, -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2} \right\} \quad \text{mit } -\pi \le \varphi_0 \le \pi \text{ fest,}$$

$$F_3 := \left\{ \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\vartheta_0 \\ r\sin\varphi\cos\vartheta_0 \\ r\sin\vartheta_0 \end{pmatrix} \ : \ 0 \le r < \infty, -\pi \le \varphi \le \pi \right\} \quad \text{mit } -\frac{\pi}{2} \le \vartheta_0 \le \frac{\pi}{2} \text{ fest.}$$

**Aufgabe 29** *(Charakterisierung von Abgeschlossenheit)* (6 Punkte)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie folgende Äquivalenz

$$a \in \overline{M} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \text{ Folge } (a_n) \text{ in M mit } a_n \to a \text{ für } n \to \infty.$$

**Aufgabe 30** *(Umgebungen)* (7 Punkte)

Sei $a, b \in \mathbb{R}^n$ und $r, R > 0$. Zeigen Sie folgende Äquivalenz

$$U_r(a) \cap U_R(b) = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad r + R \leq ||a - b||.$$