Dr. Gerhard Baur
B.Sc. Pascal Heiter

Universität Ulm
Analysis II
Wintersemester 2011/12

Analysis II - Übungsblatt 8

(Abgabe: Mittwoch, 14. Dezember 2011 vor der Übung.)

"Math is like Ophelia in Hamlet - charming and a bit mad." - *Alfred North Whitehead, 1861 - 1947, britischer Philosoph und Mathematiker.*

Aufgabe 31 *(Vereinigung abgeschlossener Mengen)* (5 Punkte)

Beweisen Sie Teil (iv) von Satz 105, d.h. zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$

$$A_k \text{ abgeschlossen } \forall\, k = 1 \dots n \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{k=1}^{n} A_k \text{ abgeschlossen.}$$

Zeigen Sie weiter, dass diese Aussage für *beliebig viele* abgeschlossene Mengen A_k nicht gilt.

Aufgabe 32 *(Abstand zweier Mengen)* (7 Punkte)

Sei $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Der Abstand zwischen A und B ist definiert durch

$$d(A,B) := \inf \{ \, ||a-b|| \, : \, a \in A, \, b \in B \, \}.$$

Zeigen Sie

$$A \text{ kompakt, } B \text{ abgeschlossen} \qquad \Rightarrow \qquad \exists\, a' \in A, b' \in B \, : \, d(A,B) = ||a' - b'||$$

also wird der Abstand angenommen.

Aufgabe 33 *(Heine-Borel)* (3+2+5=10 Punkte)

Es sei $M := \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < ||x|| \leq 1\}$

(a) Zeigen Sie explizit, dass M die Überdeckungseigenschaft aus dem Satz von Heine-Borel *nicht* erfüllt.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass M konvex ist.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie, dass M zusammenhängend ist.

Aufgabe 34 *(Stetigkeit)* (4+6=10 Punkte)

(a) Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Stetigkeit

$$\textit{(i)}\ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y,z) := \begin{pmatrix} x^3y^2 - zx \\ xe^y \sin z \end{pmatrix} \qquad \textit{(ii)}\ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := y \cdot \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{xy} & , x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}.$$

(b) Zeigen Sie jeweils für

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_1(x,y) := \begin{cases} 1 & , 0 < x = y^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_2(x,y) := \begin{cases} \frac{yx^2}{x^4+y^2} & , x^2+y^2 > 0 \neq 0 \\ 0 & x = y = 0 \end{cases},$$

dass $\lim_{x \to 0} f_i(x, \alpha x)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert und identisch sind $(i = 1,2)$, die Funktionen f_1 bzw. f_2 aber dennoch unstetig in $(0,0)^T$ sind.

Aufgabe 35 *(Stetigkeit des Skalarprodukts)* (3+5=8 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass das kanonische Skalarprodukt

$$(\,\cdot\,,\,\cdot\,) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x, y) := x^T y$$

mit $x, y \in \mathbb{R}^n$ stetig auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ist.

(b) Zeigen Sie für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$f \in C(\mathbb{R}^n),\ g \in C(\mathbb{R}^n) \quad \Rightarrow \quad f^T g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (f^T g)(x) = f^T(x) g(x) \text{ ist stetig auf } \mathbb{R}^n.$$