ulm university universität uulm

Dr. Gerhard Baur
B.Sc. Pascal Heiter

Universität Ulm
Analysis II
Wintersemester 2011/12

Analysis II - Übungsblatt 10

(Abgabe: Mittwoch, 11. Januar 2012 vor der Übung.)

"In the binary system we count on our fists instead of on our fingers."
- *unbekannt.*

Aufgabe 41 *(Umrechnung von Kugelkoordinaten)* (7 Punkte)

Gegeben sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und definiere die Transformation auf Kugelkoordinaten

$$g(r, \varphi, \vartheta) := f(r\cos\varphi\cos\vartheta, r\sin\varphi\cos\vartheta, r\sin\vartheta).$$

Berechnen Sie die Transformationsformel zwischen ∇f und ∇g.

Aufgabe 42 *(Mehrdimensionale Taylorentwicklung)* (6 Punkte)

Bestimmen Sie für die Funktion

$$f(x, y) = \cos x \sin y$$

mittels Satz 117 die Taylorentwicklung bis $m = 3$ um den Punkt $(0, 0)^T$.

Aufgabe 43 *(Umrechnung von Toruskoordinaten)* (7 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Toruskoordinaten

$$T(\sigma, \varphi, \psi) = \left\{ \begin{pmatrix} (R + \sigma\sin\varphi)\cos\psi \\ (R + \sigma\sin\varphi)\sin\psi \\ \sigma\cos\varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \, : \, 0 \le \sigma \le r, \; 0 \le \varphi \le 2\pi, \; 0 \le \psi \le 2\pi \right\}$$

wobei $0 \le r \le R$ fest, orthogonale Koordinaten bilden und berechnen Sie die Transformationsformel der Gradienten analog wie in Aufgabe 41.

Aufgabe 44 *(Lokale Extrema)* (8+5=13 Punkte)

(a) Bestimmen Sie für $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y, z) := x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$$

alle kritischen Punkte und entscheiden Sie, ob jeweils ein lokales Minimum, lokales Maximum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

(b) Gegeben seien zwei Geraden g_1, g_2 im $\mathbb{R}^3$. g_1 verläuft durch die Punkte $(1, 1, 1)^T$ und $(2, 1, 0)^T$ und g_2 ist die Schnittgerade zwischen den Ebenen mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} z &= 1, \\ x + y &= 0. \end{aligned}$$

Berechnen Sie den Abstand zwischen g_1 und g_2.

Aufgabe 45 *(Least-Square Methode)* (5+2=7 Punkte)

(a) Gegeben seien die Daten $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$. Berechnen Sie $x^* \in \mathbb{R}^n$, sodass

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} ||x - x_i||^2 \to \min,$$

also die Funktion bei x^* minimal wird. Dann wird x^* Clustermittelpunkt, oder auch Schwerpunkt der Daten genannt.

(b) Berechnen Sie den Clustermittelpunkt für die Daten

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aus $\mathbb{R}^2$.

Wir wünschen Ihnen und Ihren Familien ein frohes Fest und einen guten Rutsch ins Jahr 2012!