Dr. Gerhard Baur
B.Sc. Pascal Heiter

ulm university universität uulm

Universität Ulm
Analysis II
Wintersemester 2011/12

Analysis II - Übungsblatt 12

(Abgabe: Mittwoch, 25. Januar 2012 vor der Übung.)

"Es gibt keinen Königsweg zur Mathematik."
- Euklid von Alexandria, ca. 360 v. Chr bis ca. 280 v. Chr, griechischer Mathematiker.

Aufgabe 50 *(Implizite Kurven)* (8+4=12 Punkte)

(a) Gegeben sei die implizite Kurve

$$xy - x^3 - x - y^3 + y^2x^2 + y^2 = 0.$$

Beweisen oder widerlegen Sie, dass diese Kurve eine differenzierbare lokale Auflösung nach x und/oder nach y an der Stelle $a_1 = (0,1)^T$ besitzt und geben Sie, falls existent, $x'(1)$ bzw. $y'(0)$ an. Führen Sie selbige Überlegungen ebenfalls für den Punkt $a_2 = (0,0)^T$ durch.

(b) Gegeben sei die implizite Kurve

$$xy - x^3 + 14x - y^3 + y^2x^2 - 14y^2 = 0.$$

Beweisen oder widerlegen Sie, dass diese Kurve eine differenzierbare lokale Auflösung nach x und/oder nach y an der Stelle $a = (4,2)^T$ besitzt und geben Sie, falls existent, $x'(2)$ bzw. $y'(4)$ an.

Aufgabe 51 *(Nicht-lineare Gleichungssysteme)* (10 Punkte)

Gegeben sei das nicht-lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} x^2y_1 & + & y_1 \exp(y_2) & - & 3y_1 & & & = & 0 \\ y_1 & - & xy_2 & + & x^2y_1^3 & - & 1 & = & 0. \end{array}$$

Zeigen Sie, dass dieses Gleichungssystem im Punkt $(x; y_1, y_2) = (0; 1, \log 3)$ eindeutig nach $y = (y_1, y_2)$ auflösbar ist und geben Sie $y_1'(0)$ und $y_2'(0)$ an.

Aufgabe 52 *(Optimierung unter Nebenbedingung)* ((3+3)+7+5=18 Punkte)

(a) Gegeben sei das Optimierungsproblem $x^2 + y^2 + z^2 \to \min$ im $\mathbb{R}^3$ unter den Nebenbedingungen

$$2x + 2y + z + 9 = 0 \text{ und } 2x - y - 2z - 18 = 0.$$

Lösen Sie dieses Optimierungsproblem

(i) durch Auflösen der Nebenbedingungen und Einsetzen.

(ii) mit der Lagrange'schen Multiplikatorregel.

(b) Zeigen Sie, dass $f(x,y) = x^2 - y^2$ auf $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \right\}$ sowohl ein Maximum als auch ein Minimum annimmt und berechnen Sie diese Werte.

(c) Bestimmen Sie

$$\max \left\{ \prod_{i=1}^{n} x_i^2 : ||x||^2 = 1 \right\}.$$