Dr. Gerhard Baur
B.Sc. Pascal Heiter

Universität Ulm
Analysis II
Wintersemester 2011/12

# Analysis II - Übungsblatt 13

(Abgabe: Mittwoch, 01. Februar 2012 vor der Übung.)

"Ich glaube, dass es, im strengsten Verstand, für den Menschen nur eine einzige Wissenschaft gibt, und diese ist reine Mathematik. Hierzu bedürfen wir nichts weiter als unseren Geist.."
*- Georg Christoph Lichtenberg, 1742 - 1799, deutscher Mathematiker.*

**Aufgabe 53** *(Mehrfachintegrale)* (5+5+5=15 Punkte)

Berechnen Sie jeweils $\int_M f$ für

(i) $M = [1,2] \times [0,1] \times [0,2]$, $f(x,y,z) = \frac{2z}{(x+y)^2}$

(ii) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 1 \right\}$, $f(x,y) = 6x\cos y^3$

(iii) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\ ,\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0 \right\}$, $f(x,y,z) = \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{3}}$

*(Hinweis: Verwenden Sie bei (iii) die verallgemeinerten Kugelkoordinanten $x = ar\sin\varphi\cos\psi$, $y = br\sin\varphi\sin\psi$ und $z = cr\cos\varphi$)*

**Aufgabe 54** *(Volumina)* (7+6=13 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen der folgenden Körper

(i) Vivianischen Körper $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2,\ x^2 + y^2 \leq rx \right\}$, wobei $r > 0$ fest.

(ii) Torus $T = \left\{ \begin{pmatrix} (R + \sigma\sin\varphi)\cos\psi \\ (R + \sigma\sin\varphi)\sin\psi \\ \sigma\cos\varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \leq \sigma \leq r,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq \psi \leq 2\pi \right\}$, wobei $0 \leq r \leq R$ fest.

**Aufgabe 55** *(Volumen der $n$-dimensionalen Kugel)* (2+3+7=12 Punkte)

Sei $I_n(R)$ das Volumen einer $n$-dimensionalen Kugel mit Radius $R > 0$. Zeigen Sie

(i) $I_n(R) = R^n I_n(1)$

(ii) $I_{n+2}(R) = \frac{2\pi R^2}{n+2} I_n(R)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $R > 0$.

(iii) $I_{2n}(R) = \frac{\pi^n}{n!} R^{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $R > 0$ und $I_{2n+1}(R) = \frac{\pi^n \cdot 2^{2n+1} n!}{(2n+1)!} R^{2n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $R > 0$.

*Hinweis:*

$$I_{n+2}(R) = \int\int_{x^2+y^2 \leq R^2} I_n(\sqrt{R^2 - x^2 - y^2})\,dxdy$$