Dr. Gerhard Baur
B.Sc. Pascal Heiter

Universität Ulm
Analysis II
Wintersemester 2011/12

Analysis II - Übungsblatt 15

(Freiwillige Abgabe: Mittwoch, 15. Februar 2012 vor der Übung.)

"Kleinigkeiten sind es, die Perfektion ausmachen, aber Perfektion ist alles andere als eine Kleinigkeit."
- Sir Frederick Henry Royce, 1863 - 1933, britischer Pionier des Autobaus.

Aufgabe 59 *(Oberflächen, Oberflächenintegrale)* (8+6=14 Punkte)

(i) Berechnen Sie die Oberfläche des hyperbolischen Paraboloids $\mathcal{P} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;:\; z = \frac{x^2-y^2}{2}\,,\, x^2+y^2 \leq R^2 \right\}$, wobei $R > 0$ fest, sowie $\int_{\mathcal{P}} f \, d\sigma$ mit $f(x,y,z) = z + y^2 + \frac{1}{2}$.

(ii) Berechnen Sie die Oberfläche des Torus $\mathcal{T} = \left\{ \begin{pmatrix} (R + r\sin\varphi)\cos\psi \\ (R + r\sin\varphi)\sin\psi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;:\; 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\; 0 \leq \psi \leq 2\pi \right\}$, wobei $0 \leq r \leq R$ fest.

Aufgabe 60 *(Flächeninhalt)* (10 Punkte)

Die Kuppel der Reaktorstation in Garching hat die Form eines halben Rotationsellipsoid

$$\frac{x^2}{15^2} + \frac{y^2}{15^2} + \frac{z^2}{30^2} = 1\,,\; z \geq 0. \qquad \text{[in m]}$$

Welchen Flächeninhalt hat das Blechdach?
(Hinweis: Verwenden Sie Polarkoordinaten.)

Aufgabe 61 *(Möbiusband)* (4+6=10 Punkte)

Gegeben sei das zweidimensionale Flächenstück $\mathcal{F}$ (Möbiusband) mit Parameterisierung

$$\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} (2 + u\cos v)\cos 2v \\ (2 + u\cos v)\sin 2v \\ u\sin v \end{pmatrix}\;,\; 0 \leq u \leq 1\;,\; 0 \leq v \leq 2\pi$$

mit der "geometrischen Randkurve" $\partial\mathcal{F}$ mit Parameterisierung

$$x(t) = \begin{pmatrix} (2 + \cos t)\cos 2t \\ (2 + \cos t)\sin 2t \\ \sin t \end{pmatrix}\;,\; 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Ferner sei $f(x,y,z) := \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right)$ für $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in G := \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}$.

(i) Zeigen Sie, dass $\operatorname{rot}(f) = 0$ auf G.

(ii) Berechnen Sie $\int_{\partial\mathcal{F}} f$.

Aufgabe 62 *(Divergenz und Rotation)* (6 Punkte)

Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie folgende Identität

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(f)) = 0.$$