Dr. Gerhard Baur
B.Sc. Pascal Heiter

Universität Ulm
Analysis II
Wintersemester 2011/12

Analysis II - Zusatzblatt

(Abgabe: Mittwoch, 11. Januar 2012 vor der Übung.)

Die Punkte dieses Blattes zählen komplett als Zusatzpunkte.

Aufgabe 1 *(Grenzwert)* (3 Punkte)

Berechnen Sie für $m, n \in \mathbb{N}$ den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{\sqrt[m]{1+x} - 1}.$$

Aufgabe 2 *(Unbestimmte Integrale)* (2+2+2+2=8 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2 - x - 1}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int x^7 \log x\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$

Aufgabe 3 *(Integrale)* (4+4=8 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale

(a) $\displaystyle\int_0^\infty t^5 e^{-t}\,dt$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \log^5 x\,dx$

Aufgabe 4 *(Konvergenzradius)* (4 Punkte)

Es sei eine Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

mit Konvergenzradius $r > 0$ gegeben. Bestimmen Sie den Konvergenzradius von

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{sk}$$

für festes $s \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5 *(Kurvenlänge)* (4 Punkte)

Bestimmen Sie für die Bogenlänge für folgende Kurven

(a) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cosh t \end{pmatrix}$ mit $t \in [-1, 1]$ (b) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$ mit $t \in [1, 5]$ und $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - \log\sqrt{x}$.

Aufgabe 6 *(Punktarten)* (3 Punkte)

Bestimmen Sie ∂M, $\overline{M}$, $\mathring{M}$ für

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, y = x = 1 \text{ und } z = 1 + t, t \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 7 *(Häufungspunkte)* (7 Punkte)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie

$$H(M) := \{a \in \mathbb{R}^n \,:\, a \text{ ist Häufungspunkt von M}\}$$

ist abgeschlossen.

Aufgabe 8 *(Stetigkeit)* (3 Punkte)

Überprüfen Sie

$$f(x,y,z) := \begin{cases} \frac{xyz}{x^3+y^3+z^3} & , x, y, z \neq 0 \\ 0 & x = y = z = 0. \end{cases}$$

auf Stetigkeit in $(0,0,0)^T$.