ulm university universität uulm

Dr. Gerhard Baur
Manuel Bernhard
Wintersemester 2011/2012

Übungsblatt 7

Lineare Algebra für Informatiker und Ingenieure

(Abgabe ist zu **zweit** am 12.12.2011 um 12:10 Uhr in H22 **vor** der Übung)

Name der Tutorin oder des Tutors nicht vergessen!

Aufgabe 1 (*Erste Schritte in* $\mathbb{Z}_n$) (1+1+2+2+2+2)

(a) Man gebe die beiden Verknüpfungstabellen von $\mathbb{Z}_7$ an.

(b) Man berechne

i. $10 \mod 8$,
ii. $101 \mod 7$
iii. und $(125 \cdot 123 + 1) \mod 5$.

(c) Man löse die folgenden Gleichungen in $\mathbb{Z}$.

i. $3x + 2 \equiv 5 \mod 7$
ii. $7x + 3 \equiv 9 \mod 10$
iii. $2x - 1 \equiv 2 \mod 6$
iv. $9x + 2 \equiv 11 \mod 6$

(d) Ein Gemüsehändler überlegt auf dem Heimweg, wie viele Kürbisse er denn gekauft hat. Er weiß noch, dass er höchstens 250 für Halloween bestellt hat (denn letztes Halloween konnte er so viele Kürbisse nicht an den Mann bringen). Weiter waren die Kürbisse in Kisten zu je 18 Kürbissen verpackt. In einer Kiste fehlten 1 oder 2 Kürbisse. Alle anderen Kisten waren voll. An die Zahl der Kisten kann er sich aber nicht erinnern. Er hat die Kürbisse dann sofort ausgepackt und in Form von Pyramiden arrangiert. Jede Pyramide besteht aus 14 Kürbissen. Leider ging die Sache nicht ganz auf. Einer der Pyramiden fehlt die Spitze (ein Kürbis). Wie viele Kürbisse hat der Verkäufer bestellt?

(e) Was gibt folgendes Programm aus?

```
int16 x = 0;
int16 y = 512;
for (int16 i = 1; i < y; i = i + 1) do
    x = x + i;
end for
print x;
```

Hinweis: int16-Variablen repräsentieren Werte zwischen -2^{15} und $2^{15} - 1$. Fast immer ist die Arithmetik - wovon wir hier ausgehen - so angelegt, dass die Addition im Rechner stets modulo 2^{16} korrekt ist.

(f) Der 24.12.2011 fällt auf einen Samstag. Was ist das nächste Jahr, in dem der 24.12. auf einen Samstag fällt? (Benutzen Sie dazu keinen Kalender!)

Aufgabe 2 (*Teilbarkeitsregel für* 3) (2)

Man zeige, dass $x \in \mathbb{N}$ genau dann durch 3 teilbar ist, wenn die Quersumme (im Dezimalsystem!) von x durch 3 teilbar ist. Genauer sei

$$x = a_n \cdot 10^n + \ldots a_1 \cdot 10 + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^k$$

Bitte wenden!

und $a_0, ..., a_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Dann gilt

$$3 \text{ teilt } x \Leftrightarrow 3 \text{ teilt } \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{mit} \quad \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n.$$

Man beweise dies.

Aufgabe 3 (*Beweis zu einer Rechenregel aus der Vorlesung*) (4)

Es sei $(V, K, +, \cdot)$ ein Vektorraum über K. Man zeige, dass für $v \in V$ und $\lambda \in K$

$$\lambda \cdot v = o \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ oder } v = o$$

gilt.

Aufgabe 4 (*Abstraktere Vektorräume*) (2+2)

Man beweise, dass $(V, K, \oplus, \odot)$ ein Vektorraum ist.

(a) Es sei $V = \{x \in \mathbb{R} : \ x > 0\}$, $K = \mathbb{R}$, $a \oplus b = a \cdot b$ und $\lambda \odot a = a^{\lambda}$ für $a, b \in V$ und $\lambda \in K$.

(b) Es sei $V = \mathbb{C}^n$, $\oplus$ die übliche Addition $+$, $K = \mathbb{R}$ und $\odot$ die Multiplikation der einzelnen Komponenten, also

$$\lambda \odot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot v_n \end{pmatrix}.$$