Dr. Gerhard Baur
Manuel Bernhard
Wintersemester 2011/2012

Übungsblatt 9

Lineare Algebra für Informatiker und Ingenieure

(Abgabe ist zu **zweit** am 9.1.2012 um 12:10 Uhr in H22 **vor** der Übung)

Aufgabe 1 (*Unterraum oder nicht?*) (2+2+2)

Welche der folgenden Mengen U ist ein Unterraum des $\mathbb{R}$-Vektorraumes V?

(a) $V = \mathbb{R}^3$ und

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \; x + 2y + 5z = 0 \text{ und } 2x - y - 2z = 1 \right\}$$

(b) $V = \mathbb{R}^3$ und

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \; x + 2y + 5z = 0 \text{ und } 2x - y - 2z = 0 \right\}$$

(c) $V = \mathbb{R}^2$ und

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \; xz = 0 \right\}$$

Aufgabe 2 (*Dimensionsbestimmung von Unterräumen*) (4)

Man bestimme je eine Basis und die Dimension der Unterräume

$$U_1 = \mathcal{LH}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right], \quad U_2 = \mathcal{LH}\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right],$$

$U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$ von $\mathbb{R}^4$. Ist die Summe direkt?

Aufgabe 3 (*Gewöhnung an Matrizen*) (3)

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man berechne, sofern die Ausdrücke wohldefiniert sind AB, BA, $A^T B^T$, $B^T A^T$, $(A+B)^2$, BC, CB, $C^T B^T$, $B^T C^T$, CD, DC und D^n für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4 (*Multiplikation großer Matrizen*) (3)

Man berechne $(AB)C$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1-i & 1+2i & 3i & 1+2i & i \\ 1 & 1+i & 1 & 2 & -1 \\ 1-i & 1-i & 1 & 1 & -1 \\ 2-2i & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1-i & i & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ i & -i & 2i \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 1+i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 5 (*Symmetrische und schiefsymmetrische Matrizen*) (1+1+1+1)
Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^{n,n}$ der quadratischen n-reihigen Matrizen über dem Körper $\mathbb{R}$. Weiter sei

$$U_1 := \left\{A \in \mathbb{R}^{n,n} : \ A^T = A\right\}$$

die Menge der symmetrischen und

$$U_2 := \left\{A \in \mathbb{R}^{n,n} : \ A^T = -A\right\}$$

die Menge der schief- oder anti-symmetrischen Matrizen. Üblicherweise wird in der Literatur U_2 mit $\mathfrak{so}(n)$ bezeichnet (Diese Menge hängt eng mit der Gruppe $\mathrm{SO}(n)$ zusammen - ist aber nicht mit dieser zu verwechseln!). Ziel der Aufgabe ist es

$$\mathbb{R}^{n,n} = U_1 \oplus U_2$$

zu zeigen.

(a) Es sind U_1 und U_2 Unterräume von $\mathbb{R}^{n,n}$.
(b) Die Summe der beiden Unterräume ist direkt.
(c) Die Summe der Unterräume ist $\mathbb{R}^{n,n}$. Man zeige also

$$\mathbb{R}^{n,n} = U_1 + U_2.$$

(d) Man bestimme die Dimension von U_1 und die Dimension von U_2 in Abhängigkeit von n.

Weihnachtsaufgabe 6 (*Punktegeschenke - 100% auf diesem Blatt sind 20 Punkte*) (1*+1*)
Der Stern S

habe seinen Mittelpunkt im Koordinatenursprung von $\mathbb{R}^2$. Es sei

$$D_5 = \left\{A \in \mathbb{R}^{2,2} : A \cdot S = S\right\}$$

die Symmetriegruppe des Sterns $S \subset \mathbb{R}^2$. Dabei ist $A \cdot S = \left\{Ax \in \mathbb{R}^2 : \ x \in S\right\}$.

(a) Man zeige D_5 mit der Multiplikation von Matrizen eine nicht abelsche Gruppe ist (Die Existenz von Inversen müssen Sie aber nicht zeigen!).
(b) Man gebe die Elemente von D_5 explizit als Matrizen an (ohne Beweis!).

Schöne Feiertage, guten Rutsch und erholsame Ferien!