ulm university universität uulm

Dr. Gerhard Baur
Manuel Bernhard
Wintersemester 2011/2012

Übungsblatt 12

Lineare Algebra für Informatiker und Ingenieure

(Abgabe ist zu **zweit** am 30.1.2012 um 12:10 Uhr in H22 **vor** der Übung)

Aufgabe 1 (*Determinante - diesmal mit mehr Regeln*) (2+2)

Man berechne die Determinante der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 773 & 772 & 771 \\ 774 & 773 & 772 \\ 775 & 774 & 773 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 7 & 2 & 0 \\ 11 & -12 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 12 & 2 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (*Cramersche Regel*) (2+2)

(a) Es gibt genau eine Lösung von

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man berechne x_4 mit der Cramerschen Regel.

(b) Man berechne alle Lösungen von

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von $\alpha, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (*Eigenwerte und Eigenräume*) (1+1+3+3)

Man berechne zu den folgenden Matrizen je die Eigenwerte und eine Basis der Eigenräume.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ -10 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (*Frobenius-Block*) (2)

Es stellt sich die Frage, welche (geeignet normierten und nicht-konstanten) Polynome als charakteristische Polynome einer Matrix auftreten können. Diese Frage kann man schnell beantworten. Man berechne dazu das charakteristische Polynom des Frobenius-Blocks. Ein Frobenius-Block ist dabei eine quadratische Matrix von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} & & & -a_0 \\ 1 & & & -a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

Zur besseren Lesbarkeit wurden 0-Einträge nicht geschrieben. Die Einsen befinden sich dabei unterhalb der Diagonale (in der ersten Subdiagonalen) und in der letzten Spalte stehen beliebige Zahlen. Ansonsten findet man in der Matrix nur Nullen. Für ein schöneres Ergebnis wurde die rechte Spalte wie angegeben besetzt.

Aufgabe 5 (*nette Aufgaben*) (2+2*+2*)

Man bearbeite die folgende Aufgaben.

(a) Es sei bemerkt, dass $42 \mid 1554$, $42 \mid 2982$, $42 \mid 5964$ und $42 \mid 8274$ gilt. Man zeige, dass dann auch

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & 4 \\ 2 & 9 & 8 & 2 \\ 5 & 9 & 6 & 4 \\ 8 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

durch 42 teilbar ist.

(b) Es sei $A \in \mathbb{Z}^{n,n}$ eine Matrix. Man zeige, dass es genau dann eine Matrix $B \in \mathbb{Z}^{n,n}$ gibt mit $AB = E$, wenn $|\det A| = 1$ ist.

(c) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ spaltenstochastisch (d.h. die Summe der Einträge in jeder Spalte von A ist 1 - dies erfüllt die Matrix A aus dem PageRank von Google). Man zeige, dass 1 ein Eigenwert der Matrix A ist.