ulm university universität uulm

Dr. Gerhard Baur
Manuel Bernhard
Wintersemester 2011/2012

Probeklausur

Lineare Algebra für Informatiker und Ingenieure

(Die Klausur ist im Umfang kleiner als diese Probeklausur. Wir wollten nur ein möglichst breites Feld an Aufgabentypen abdecken.)

Aufgabe 1 (4+4)

Beweisen oder widerlegen Sie, dass folgende Teilmenge der Matrizen $\mathbb{R}^{2,2}$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ und } \alpha^2 + \beta^2 > 0 \right\}$$

bezüglich

(a) der Addition von Matrizen
(b) der Multiplikation von Matrizen

eine Gruppe ist?

Aufgabe 2 (8)

Es sei V ein Vektorraum über K von der Dimension n. Weiter sei U ein Unterraum von der Dimension $m < n$. Man zeige, dass es einen Unterraum W von V mit

$$V = U \oplus W$$

gibt. Zeigen Sie dies.

Aufgabe 3 (3+4+2+2+2+3)

(a) Man berechne $A(BC)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+i & 2+3i & 5 & 2 & 1+2i \\ 1 & 3i & 5 & 2 & 1+i \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ i & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Man berechne $\det A$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Man berechne $\det B$ für

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1+i & 1-i \\ 3+i & 9+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i & 2-3i \\ 1+4i & 1+i \\ 3-7i & i \end{pmatrix}^T.$$

(d) Man berechne $\operatorname{rg} A$.
(e) Man berechne $\det\left(A^{-1}A^TA\right)$.

Bitte wenden!

(f) Man berechne die dritte Koordinate von x, wobei

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt.

Aufgabe 4 (5+5)

Es sei ein K-Vektorraum V mit einer Basis u, v, w gegeben. Man betrachte die Vektoren

$$v + 2w + 2u, \quad v + w - 2u, \quad 2v + 2w + 2u.$$

(a) Man zeige, dass diese linear unabhängig sind, falls $K = \mathbb{R}$ ist.

(b) Begründen Sie für welche Primzahlen p die Vektoren über $K = \mathbb{Z}_p$ linear unabhängig sind?

Aufgabe 5 (5+3)

Beweisen oder widerlegen Sie, welche der folgenden Mengen unter den angegebenen Operationen $\mathbb{R}$-Vektorräume sind?

(a)

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \right\}$$

mit der gewöhnlichen (komponentenweiser) Addition und Skalarmultiplikation.

(b)

$$V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \ f(2) = 0 \text{ und } f(0) = 1 \}$$

mit der Addition $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ und der Skalarmultiplikation $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

Aufgabe 6 (10)

Es sei A eine reguläre Matrix. Weiter sei λ ein Eigenwert von A. Man zeige, dass dann $\lambda \neq 0$ ist und $1/\lambda$ ein Eigenwert von A^{-1} ist. Weiter zeige man, dass

$$\mathrm{Eig}_A(\lambda) = \mathrm{Eig}_{A^{-1}}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

gilt.

Aufgabe 7 (3+5+5+2)

Gegeben seien die Unterräume

$$U_1 = \mathcal{LH}\left(1+\sin x+\cos x, e^x+2\sin x+2\cos x+2\right)$$

$$U_2 = \mathcal{LH}\left(e^x+1+\sin x, 1-\cos x, 1+2\sin x+\cos x, e^x+1-\cos x\right)$$

von $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Man berechne

(a) eine Basis von U_1.
(b) eine Basis von $U_1 \cap U_2$.
(c) eine Basis von $U_1 + U_2$.
(d) die Dimension von U_2.

Aufgabe 8 (4+4+4+4+4)

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1+\alpha \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ und die Vektoren

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Man berechne den Rang von A.
(b) Man berechne den Rang von B.
(c) Man berechne den Kern von A.
(d) Man berechne den Rang von $(B|c)$.
(e) Man gebe eine Parameterdarstellung der linearen Mannigfaltigkeit $\{x \in \mathbb{R}^5 : \; Ax = b\}$ an.
(f) Man berechne die Lösungsmenge von $By = c$ in Abhängigkeit von α.

Aufgabe 9 (4+4+4)

Man bestimme die komplexen Eigenwerte und eine Basis für die jeweiligen Eigenräume. Man gebe zudem einem Diagonalisierung der Matrizen an, falls die möglich ist (Mit Begründung, eventuelle Inverse müssen nicht berechnet werden!).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10 (5)

Man zeige, dass für eine Matrix $A \in K^{l,m}$ und eine Matrix $B \in K^{m,n}$ stets

$$\ker B \subset \ker AB$$

gilt.

Bitte wenden!

Aufgabe 11 (2+2+2+2)

Gegeben seien die Permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Man schreibe σ als Produkt von Transpositionen.
(b) Man schreibe σ^{-1} als Produkt von Transpositionen.
(c) Man gebe alle Inversionen von τ an.
(d) Man berechne das eindeutige $x \in S_5$, welches $\sigma \circ x = \tau$ erfüllt.

Aufgabe 12 (5)

Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit

$$n = \sum_{i=0}^{m} a_i 10^i,$$

wobei $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ist. Man zeige, dass

$$11 \mid n \Leftrightarrow 11 \mid (a_0 - a_1 + a_2 - .... + (-1)^n a_n)$$

gilt.