Besondere Werte für trigonometrische Funktionen

In einem ersten Schritt, muss man sich an die Werte $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$ erinnern, für die man die Sinus-Werte kennen sollte.
Die schreibt man dann aufsteigend in eine Tabelle. Man beginnt nun nach der Reihe (beginnend bei $n = 0$) die Sinus-Werte

$$\frac{1}{2}\sqrt{n}$$

dem n-ten Werten zuzuordnen.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Merkregel	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Man bekommt damit auch die zugehörigen Kosinus-Werte, wenn man

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

beachtet. Die Tabelle lautet dann, wenn man noch

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

einträgt, wie folgt:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos x	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan x	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	undef.

Weitere Werte bekommt man mittels

$$\tan x = \tan(x + \pi), \quad \tan(-x) = -\tan x,$$
$$\cos x = \cos(x + 2\pi), \quad \cos(-x) = \cos x,$$
$$\sin x = \sin(x + 2\pi), \quad \sin(-x) = -\sin x$$

und

$$\cos x = \sin(x + \pi).$$

Aus diesem ergibt sich, wie wir auch in der Übung gesehen und benutzt haben

$$e^{xi} = e^{xi+2\pi i}.$$

Werte, die man auf jeden Fall kennen sollte sind die Werte der trigonometrischen Funktionen für $0, \pi/2, \pi/4$.
Es sind natürlich noch mehr explizite Werte bekannt. So ist etwa

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right).$$

Alle Werte, die hier aufgelistet wurden haben eines gemein. Sie sind bekannt, weil man bestimmte Strukturen konstruieren kann. Genauer ist für jedes mit Zirkel und Lineal konstruierbare reguläre n-Eck der Wert

$$\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

für $k \in \mathbb{Z}$ bekannt. Dies sind im Prinzip genau solche Zahlen, welche man unter den Werten

$$\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \ k, n \in \mathbb{N}$$

durch die Operationen $+, \cdot, /, -, \sqrt{\cdot}$ aus den rationalen Zahlen erhalten kann. Ob auch explizite Werte bekannt sind, die sich nicht aus einfachen Folgerungen dieser Werte ergeben, ist mir nicht bekannt.
Beispiel: Es sei $z = 1 - i\sqrt{3}$, dann ist

$$\arg z = \arctan\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = \arctan\left(-\sqrt{3}\right) = -\arctan\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}.$$

In der Tat gilt dann, wie auch allgemein,

$$z = |z| e^{i \arg z}.$$

Dies sieht man speziell in diesem Beispiel, weil

$$|z| = 2 \quad \text{und} \quad e^{i \arg z} = \cos\frac{\pi}{3} - i \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

gilt.