Dr. Gerhard Baur
M.Sc. Pascal Heiter

Universität Ulm
Maßtheorie
Wintersemester 2012/2013

Maßtheorie - Übungsblatt 9

(Abgabe: Mittwoch, 19. Dezember 2012 vor der Übung.)

Aufgabe 20 *(Darstellung des Integrals)* (4+4=8 Punkte)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \geq 0$ und $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ ein Maßraum mit

$$\mu(E) := \sum_{n\in E} a_n.$$

Weiterhin sei $f \in \mathcal{M}^+(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, etwa $f : n \mapsto f_n \in [0, \infty]$. Zeigen Sie

$$\int f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n.$$

Aufgabe 21 *(Verschiebung des Integrals)* (6 Punkte)

Sei $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\lambda^*}$, $\mu = \lambda$, $f \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{A})$ und $E \in \mathcal{A}_{\lambda^*}$. Weiter sei für $c \in \mathbb{R}$

$$g : E + c \to [0, \infty] \text{ mit } g(y) := f(y - c).$$

Zeigen Sie

$$\forall\, c \in \mathbb{R} : g \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{A})$$

und es gilt

$$\int_E f\, d\lambda = \int_{E+c} g\, d\lambda.$$

Aufgabe 22 *(Konkretes Integral)* (6 Punkte)

Sei $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ ein Maßraum mit

$$\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \bar{\mathbb{R}}, \quad E \mapsto \mu(E) := \sum_{n\in E} 2^{-n}$$

gegeben. Berechnen Sie, falls existent, das Integral

$$\int_F f\, d\mu$$

für $f = id_{\mathbb{N}}$ (d.h. $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{N}$) und $F = \{x \in \mathbb{N} \;:\; x \text{ gerade}\}$.