Dr. Gerhard Baur
M.Sc. Pascal Heiter

Universität Ulm
Maßtheorie
Wintersemester 2012/2013

Maßtheorie - Übungsblatt 14

(Abgabe: Mittwoch, 6. Feburar 2013 vor der Übung.)

Zulassungsvoraussetzung für die Klausur

Sei x_i die auf dem i. Blatt erreichte Punktzahl mit $i = 1 \dots 14$. Dann ist die Zulassungsvoraussetzung für die Klausur gegeben durch

$$\sum_{i=1}^{14} x_i \geq 140 \text{ (Punkte).}$$

Bitte melden Sie sich **bis spätestens 15.02.2013** für die Vorleistung im Hochschuldienstportal an.

Aufgabe 33 *(Kettenregel und Umkehrfunktion)* (5+5=10 Punkte)

Seien λ, μ und ν σ-endliche Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie:

a) Wenn $\nu \ll \lambda$ und $\lambda \ll \mu$ gilt, so gilt auch

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{d\nu}{d\lambda}\frac{d\lambda}{d\mu} \qquad \mu\text{-fast überall.}$$

b) Wenn $\lambda \ll \mu$ und $\mu \ll \lambda$ gilt, so gilt auch

$$\frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{1}{d\mu/d\lambda} \qquad \text{fast überall.}$$

Aufgabe 34 *(Konvergenzarten)* (3+3+4=10 Punkte)

Sei der Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ gegeben und darauf eine Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) = n \cdot \chi_{A_n}(x) \qquad , A_n := \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie

a) $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert punktweise auf $\mathbb{R}$

b) $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ist λ-maßkonvergent

c) $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert nicht im p-ten Mittel $(1 \leq p < \infty)$.