Gerhard Baur
Matthias Heinlein

Wintersemester 14/15
9. Februar 2015
Sammelblatt

Sammelübungsblatt zur Linearen Optimierung und Differentialgleichungen

(http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/baur/ws14150/linopt.html)

(Besprechung in den Vorlesungen)

1. Löse die folgenden linearen Optimierungsprobleme. Gib jeweils an, ob eine optimale Lösung existiert (oder ob das Problem unbeschränkt oder unzulässig ist). Im Falle einer optimalen Lösung ist diese anzugeben.

(a)

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \max & 4x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & \text{s.t.} & \\ & 2x_1 & + & x_2 & & & \leq & 10 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & \leq & 8 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{lrcrcr} \min & 3x_1 & + & 4x_2 & \text{s.t.} & \\ & x_1 & + & 2x_2 & \geq & 2 \\ & 3x_1 & + & x_2 & \geq & 5 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{lrcrcr} \min & 3x_1 & + & 4x_2 & \text{s.t.} & \\ & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 4 \\ & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 & + & x_2 & \geq & 2 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \max & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \text{s.t.} & \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & \leq & 15 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & & & \leq & 7 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

2. Löse das folgende lineare Optimierungsproblem indem

   (a) Du es graphisch löst.

   (b) Du es mit dem Simplexalgorithmus löst (dabei darf bei der Wahl der Pivotspalten durchaus die Information aus der graphischen Lösung verwendet werden).

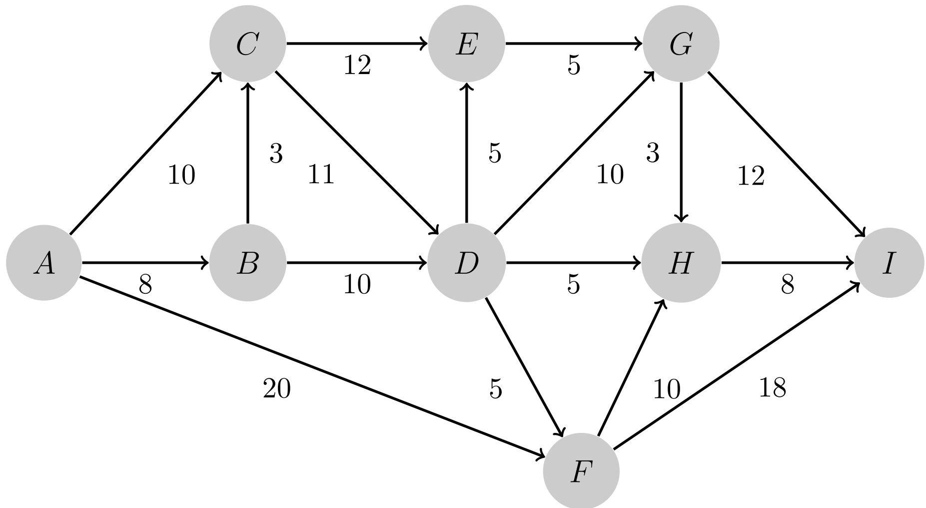
   (c) Du das Duale Problem aufstellst und dieses mit Simplex löst.

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & x_1 & + & 4x_2 & & \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 26 \\ & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 25 \\ & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 6 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

3. Löse das folgende Optimierungsproblem (beachte die Vorzeichenrestriktionen):

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\min & -x_1 & + & x_2 & & \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 5 \\
 & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1 & & & \geq & 0 \\
 & x_2 & & & & \text{frei}
\end{array}
$$

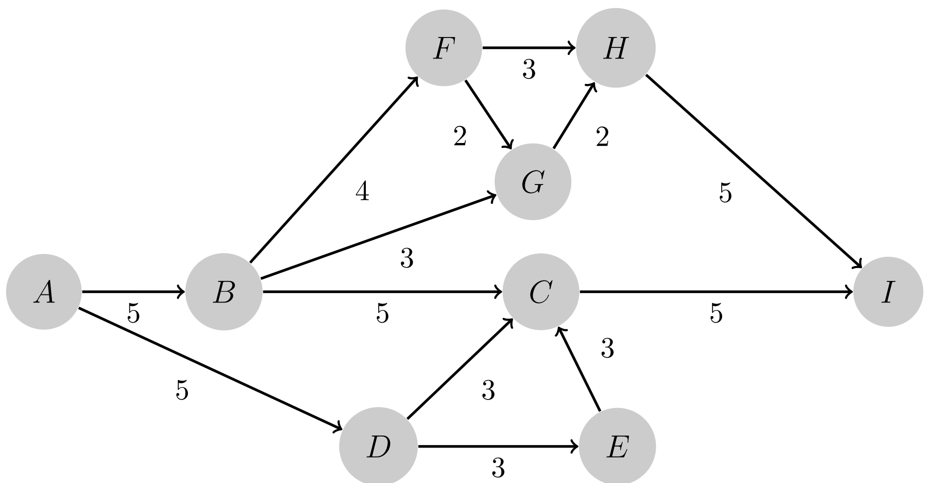
4. Gegeben sei der Abhängigkeitsgraph eines Produktionsproblems wie folgt:



Die Kantenbeschriftungen geben an, wie viele Tage ein bestimmter Prozess (= Übergang von einem Zustand in einen anderen) dauert. Ein Zustand (=Knoten des Graphen) kann nur erreicht werden, wenn alle seine Vorgänger erreicht wurden.

Berechne früheste und späteste Startzeitpunkte und Pufferzeiten der einzelnen Prozesse und daraus die minimale Projektdauer und kritische Vorgänge.

5. Gegeben sei das folgende Flussnetzwerk:



Berechne mit dem Ford-Fulkerson-Algorithmus einen maximalen Fluss vom Knoten A zum Knoten I. In deiner Lösung muss klar ersichtlich sein, welche Schritte nacheinander getätigt wurden.

6. Löse die folgenden Anfangswertprobleme:

   (a) $\dot{x} = \frac{5}{t}x$, $x(2) = 3$,

   (b) $\dot{x} = \frac{5}{t}x + t^2$, $x(1) = 1$,

   (c) $\dot{x} = x(x+1)$, $x(1) = 1$,

   (d) $\dot{x} = t \cdot (x^2 + 1)$, $x(0) = 0$,

   (e) $\dot{x} = 5x - 12x^3$, $x(0) = 0$.

7. Löse die folgenden Anfangswertprobleme und überprüfe, ob die Lösung asymptotisch stabil ist.

   (a) $\ddot{x} + 7\dot{x} + 10x = 0$, $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1$,

   (b) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 10x = 1$, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$,

8. Bestimme reelle Basislösungen von

$$\dddot{x} - 3\ddot{x} + 3\dot{x} - x = 0.$$

9. Bestimme alle Lösungen von

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = e^{-t}.$$