Gerhard Baur
Matthias Heinlein
Marcus Heitel

Wintersemester 2015/2016
20. Oktober 2015
Blatt 2

Übungen zu Analysis 2

(https://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/baur/ws1516/analysis-2.html)

Abgabe bis zum 27.10.15 12:15 Uhr im H14

5. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n -mal differenzierbare Funktionen.

   (i) Beweise die Formel für die n -te Ableitung des Produkts $f \cdot g$:

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

   (ii) Berechne die n -te Ableitung der Funktion $x^2 e^{2x}$.

(6+3=9 Punkte)

6. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine *gerade* Funktion, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = f(-x)$. Ferner sei $f \in C_\infty(\mathbb{R})$. Zeige: Dann enthält die Taylorreihe von f um Entwicklungspunkt 0 nur gerade Potenzen von x .

(5 Punkte)

7. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

   (i) Zeige, dass
$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
   für alle $x, x_0 \in \mathbb{R}$ gilt.

   (ii) Zeige weiter, dass
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$
   für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt.

   (iii) Was bedeuten diese Ungleichungen geometrisch?

(3+5+2=10 Punkte)

8. Seien Z und Z' zwei Zerlegungen $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ bzw. $a = y_0 < y_1 < ... < y_m = b$ des Intervalls $[a, b]$. Man nennt Z' eine Verfeinerung von Z , falls

$$\{x_0, x_1, ..., x_n\} \subset \{y_0, y_1, ..., y_m\}$$

   gilt. Zeige, dass für jede beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine feinere Zerlegung eine nichtgrößere Obersumme ergibt, also $O(Z'; f) \leq O(Z; f)$ gilt.

(6 Punkte)