

## Übungen zu Analysis 2

(<https://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/baur/ws1516/analysis-2.html>)

**Abgabe bis zum 17.11.15 12:15 Uhr im H14**

17. Berechne den Wert der folgenden Ausdrücke, indem du sie als Riemannsche Zwischensummen interpretierst:

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n(n+k)}, \quad (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{4n^2}{4n^4 + 4k^2 - 4k + 1}.$$

(2+4=6 Punkte)

18. Berechne die folgenden uneigentlichen Integrale, sofern sie existieren:

$$(i) \int_0^{\infty} \frac{1}{4+x^2} dx, \quad (ii) \int_0^{\infty} x e^{-x} dx, \quad (iii) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx.$$

(3x2=6 Punkte)

19. Prüfe, ob die folgende uneigentlichen Integrale konvergieren und/oder absolut konvergieren.

$$(i) \int_1^{\infty} \frac{\sin \pi x}{x^{3/2}} dx, \quad (iii) \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sin x} dx, \\ (ii) \int_0^1 \frac{e^t}{t} dt, \quad (iv) \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx.$$

(4x2=8 Punkte)

20. Berechne die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen.

$$(i) \sum_{k=0}^{\infty} kx^k, \quad (ii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad (iii) \sum_{k=0}^{\infty} k^k x^k.$$

(1+2+1=4 Punkte)

21. Vergleich von unendlichen Reihen und uneigentlichen Integralen:

(i) Es sei  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  monoton fallend. Zeige, dass

$$\int_0^{\infty} f(x) dx < \infty \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} f(k) < \infty$$

(ii) Finde eine Funktion  $f$ , sodass  $\int_0^{\infty} f(x) dx$  konvergiert, obwohl  $f(x)$  nicht gegen 0 geht für  $x \rightarrow \infty$ .

(4+2 = 6 Punkte)