Gerhard Baur
Matthias Heinlein
Marcus Heitel

Wintersemester 2015/2016
7. Dezember 2015
Blatt 9

Übungen zu Analysis 2

(`https://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/baur/ws1516/analysis-2.html`)

Abgabe bis zum 15.12.15 12:15 Uhr im H14

39. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $x \in A$. Zeige: x ist genau dann Häufungspunkt von A , falls es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ gibt mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$ und $x_n \neq x \;\forall n \in \mathbb{N}$. (3 Punkte)

40. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stetig. Zeige, dass dann auch ihr (kanonisches) Skalarprodukt
$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = <f(x), g(x)>$$
stetig ist. (2 Punkte)

41. Beweise den Satz 113 der Vorlesung

    Eine auf einer kompakten Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ stetige Funktion $f : M \to \mathbb{R}^n$ ist auch gleichmäßig stetig auf M ,
    d.h. $\forall \epsilon > 0 \;\exists \delta > 0 \;\forall x, y \in M$ mit $||x - y|| < \delta \;\Rightarrow ||f(x) - f(y)|| < \epsilon$.

    indem du den Satz von Heine-Borel verwendest.

    (6 Punkte)

42. (i) Finde je ein Beispiel einer Menge A , für die die Überdeckungseigenschaft des Satzes von Heine-Borel nicht erfüllt ist, wobei A einmal
    (a) nicht abgeschlossen, aber beschränkt ist, und im anderen Fall
    (b) nicht beschränkt, aber abgeschlossen ist.

    (ii) $\mathbb{R} = (-\infty, 1) \cup (0, \infty)$, $\mathbb{R}$ kann also mit endlich vielen offenen Mengen überdeckt werden. Folgt daraus, dass $\mathbb{R}$ kompakt ist? Begründung!

    (2+2+2=6 Punkte)

43. (i) Zeige: Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ gilt $\lim_{n\to\infty} x_n \in A$.

    (ii) Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt folgenkompakt, falls jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ eine in A konvergente Teilfolge (d.h. die Teilfolge konvergiert und der Grenzwert liegt auch in A) besitzt.
    Zeige, dass Kompaktheit und Folgenkompaktheit im $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind.

    (4+5=9 Punkte)

44. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^6} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad x = y = 0 \end{cases}$$
Zeige, dass f an der Stelle $(0, 0)$ unstetig ist, aber für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\binom{\alpha}{\beta} \neq \binom{0}{0}$ die Einschränkung auf die Gerade $G_{\alpha,\beta} := \left\{ \binom{x}{y} : \alpha x + \beta y = 0 \right\}$ stetig ist. (4 Punkte)