Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 26.10.2016

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Attila Klimmek
Wintersemester 2016/17
Punktzahl: 16

Übungen Lineare Algebra 1: Blatt 1

1. Betrachten Sie die beiden Ebenen (2)

$$E_1 := \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad E_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

im $\mathbb{R}^4$. Zeigen Sie, dass $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ gilt.

2. Betrachten Sie ein Viereck V im $\mathbb{R}^2$ mit den (gegen den Uhrzeigersinn nummerierten) Eckpunkten a, b, c, d. Man bezeichnet das Viereck V als *Drachenviereck*, falls $\|a-b\| = \|a-d\|$ und $\|c-b\| = \|c-d\|$ gilt. Zeigen Sie: Ist V ein Drachenviereck, so stehen die beiden Diagonalen in V senkrecht aufeinander. (4)

Tipp: Sie müssen zeigen, dass $(a-c) \cdot (b-d) = 0$ gilt; quadratieren Sie hierzu die Gleichungen aus der Definition des Begriffs „Drachenvierecks" und verwenden Sie, dass $\|x\|^2 = x \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt.

3. Betrachten Sie das Dreieck im $\mathbb{R}^2$ mit den drei Eckpunkten (3)

$$a := \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad c := \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Kosinus aller drei Innenwinkel dieses Dreiecks.

4. Betrachten Sie im $\mathbb{R}^3$ die Ebene (7)

$$E := \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\},$$

die Geraden

$$G_1 := \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \qquad G_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

und die Gerade G_3, welche durch die Punkte

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

verläuft. Bestimmen Sie die Schnittmengen $E \cap G_1$, $E \cap G_2$ und $E \cap G_3$.