Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 09.11.2016

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Attila Klimmek
Wintersemester 2016/17
Punktzahl: 25

Übungen Lineare Algebra 1: Blatt 3

10. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und seien $a, b, c \in G$. (2+1+1)

(a) Zeigen Sie, dass $(a^{-1})^{-1} = a$ und $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$ gilt.

(b) Sei $a \circ b = a \circ c$. Zeigen Sie, dass $b = c$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass es Vektoren $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ gibt, für die $x \times y = x \times z$, aber $y \neq z$ gilt.

11. Seien $(G_1, \circ_1)$ und $(G_2, \circ_2)$ zwei Gruppen; es bezeichne e_1 das neutrale Element von G_1 und e_2 das neutrale Element von G_2. Sei $\varphi : G_1 \to G_2$ ein Gruppenhomomorphismus. (1+3+2)

(a) Zeigen Sie, dass $\varphi(e_1) = e_2$ gilt.

(b) Die Menge $\ker \varphi := \{g \in G_1 : \varphi(g) = e_2\}$ bezeichnet man als den *Kern* von φ; laut Teilaufgabe (a) gilt stets $e_1 \in \ker \varphi$.
Zeigen Sie: Es ist φ genau dann injektiv, wenn $\ker \varphi = \{e_1\}$ gilt.

(c) Zeigen Sie: Ist $(G_1, \circ_1)$ kommutativ und φ surjektiv, so ist auch $(G_2, \circ_2)$ kommutativ.

12. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element e. Eine Teilmenge $U \subseteq G$ heißt *Untergruppe* von G, falls $g_1 \circ g_2 \in U$ für alle $g_1, g_2 \in U$ gilt und $(U, \circ)$ ebenfalls eine Gruppe ist. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind: (6)

(i) U ist eine Untergruppe von G.

(ii) Es ist $e \in U$ und für alle $g, g_1, g_2 \in U$ gilt $g_1 \circ g_2 \in U$ und $g^{-1} \in U$.

(iii) Es ist $U \neq \emptyset$ und für alle $g_1, g_2 \in U$ gilt $g_1^{-1} \circ g_2 \in U$.

Tipp: Zeigen Sie (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i).

13. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei A_n die Menge aller geraden Permutationen in S_n. (2+3)

(a) Zeigen Sie, dass A_n eine Untergruppe von $(S_n, \circ)$ ist.

(b) Betrachten Sie ein regelmäßiges Sechseck, dessen Ecken gegen den Uhrzeigersinn von 1 bis 6 nummeriert sind. Das Sechseck werde nun um 120 Grad gegen den Uhrzeigersinn gedreht; die Permutation $\sigma \in S_6$ gebe an, wie die Ecken bei dieser Drehung permutiert werden.

(i) Geben Sie σ explizit an und bestimmen Sie zudem σ^{-1}.

(ii) Bestimmen Sie σ^{2016}.

(iii) Zerlegen Sie σ in Transpositionen und entscheiden Sie, ob $\sigma \in A_6$ gilt.

14. Wir versehen $\mathbb{R}^2$ mit der komponentenweise Addition $+$, die Sie bereits aus der Vorlesung kennen, und mit der Verknüpfung $\star$, welche durch (4)

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{pmatrix} \qquad \text{für alle} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

gegeben ist. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2, +, \star)$ ein kommutativer Ring mit Einselelement, aber kein Körper ist.