Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 21.12.2016

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Attila Klimmek
Wintersemester 2016/17
Punktzahl: 21

Übungen Lineare Algebra 1: Blatt 9

39. Sei K ein Körper, seien $m, n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in K^{n,m}$. Eine Matrix B mit Einträgen aus K heißt *Untermatrix* von A, wenn B aus A durch das Streichen mancher (oder keiner) Zeilen und mancher (oder keiner) Spalten entsteht. (6)

Sei $A \neq 0$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{rg}(A)$ die größte Zahl $r \in \mathbb{N}$ ist, welche folgende Eigenschaft erfüllt: Es gibt eine quadratische Untermatrix B von A mit r Zeilen und Spalten, für welche $\det B \neq 0$ gilt.

40. Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$. (4+1+2)

(a) Wir definieren die Matrix

$$C := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

Zeigen Sie, dass $\det C = \prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_k - x_j)$ gilt.

(b) Sei nun $n = 4$, sei $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ und $x_4 = 4$. Es sei $C \in \mathbb{R}^{4,4}$ wie in Teilaufgabe (a) gegeben. Berechnen Sie $\det C$ mit Hilfe der Formel, die sie in Teilaufgabe (a) bewiesen haben.

(c) Seien $y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Sind alle Zahlen $x_1, ..., x_n$ verschieden, so gibt es Koeffizienten $\alpha_0, ..., \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ derart, dass das Polynom $p(x) := \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^k$ an den Stellen $x_1, ..., x_n$ die Werte $y_1, ..., y_n$ annimmt.

41. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine Matrix, die nur ganzzahlige Einträge besitzt. Zeigen Sie: Genau dann sind alle Einträge der inversen Matrix A^{-1} ganzzahlig, wenn $|\det A| = 1$ gilt. (4)

42. Sei $\mathbb{F}_3 := \{0, 1, 2\}$ und seien $+, \cdot : \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3 \to \mathbb{F}_3$ durch die Tabellen (4)

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

gegeben. Das bedeutet, für $a, b \in \mathbb{F}_3$ berechnet man $a + b$, indem a und b als natürliche Zahlen addiert und anschließend den Rest berechnet, den man bei Division durch 3 erhält; analog dazu berechnet man $a \cdot b$, indem man a und b als natürliche Zahlen multipliziert und anschließend den Rest berechnet, den man bei Division durch 3 erhält.

Man kann zeigen, dass $(\mathbb{F}_3, +, \cdot)$ ein Körper ist. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{6,6}.$$

Berechnen Sie $\det A$.