Universität Ulm

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Alle Aussagen sind zu begründen!

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Attila Klimmek
Wintersemester 2016/17
Punktzahl: 100

Lineare Algebra 1: Klausur 2 - Lösungsvorschlag

1. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen: (6×5)

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Menge $\{A \in \mathbb{C}^{n,n} : \det A = 0\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{C}^{n,n}$.

Lösung: Die Aussage ist falsch. Seien $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}(1)$. Dann gilt

$$\det A_1 = \det A_2 = 0, \qquad \text{aber} \qquad \det(A_1 + A_2) = \det E = 1.(2)$$

Somit ist die Menge nicht abgeschlossen bezüglich der Addition (2) und daher kein Untervektorraum von $\mathbb{C}^{2,2}$.

1 Punkt für die Gegenbeispiele, 2 Punkte für den Nachweis, dass es Gegenbeispiele sind und 2 Punkte für die Begründung, warum es daher kein UVR ist.

(b) Die Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x + y^2 z$ ist linear.

Lösung: Die Aussage ist falsch. Es gilt $T(1,1,1) = 2$ aber $T(2,2,2) = 2 + 4 \cdot 2 = 10 \neq 2 \cdot T(1,1,1)$.(5) Also ist T nicht linear.

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $S \in GL_n(\mathbb{R})$. Dann ist die Abbildung $f : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$, $A \mapsto S^{-1}AS$ ein Gruppenhomomorphismus.

Lösung: Die Aussage ist richtig. Für $A, B \in GL_n(K)$ gilt

$$f(AB) = S^{-1}ABS = S^{-1}ASS^{-1}BS(4) = f(A)f(B)(1).$$

Somit ist f ein Gruppenhomomorphismus.

(d) Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $A, B \in K^{n,n}$. Wenn A invertierbar ist, dann gilt $\ker AB = \ker B$.

Lösung: Die Aussage ist richtig. Seien $x, y \in K^n$. Da A invertierbar ist, folgt, dass

$$Ay = 0 \iff y = 0.(1)$$

Daraus folgt:

$$x \in \text{ker } AB \iff ABx = 0(1) \iff Bx = 0(1) \iff x \in \text{ker } B(1).$$

Daher gilt $\ker AB = \ker B$.(1)

(e) Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ mit $A^4 = 0$. Dann ist 0 ein Eigenwert von A.

Lösung: Die Aussage ist richtig. Nach dem Determinantenmultiplikationssatz (1) gilt $0 = \det(A^4) = (\det A)^4$ (1) und somit $\det A = 0$(1). Da Determinante von A das Produkt der Eigenwerte von A ist (1) und das Produkt Null ergibt, muss Null ein Eigenwert von A sein(1).

(f) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} -12 & -17 & -31 \\ -17 & 33 & 11 \\ -31 & 11 & -97 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$ ist negativ definit.

Lösung: Die Aussage ist falsch. Sei $q_A(x) = x^T Ax$ die zu A assoziierte quadratische Form und seien $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^3$ die kanonischen Einheitsvektoren. Dann gilt $q_A(e_1) = -12 < 0(2)$ und $q_A(e_2) = 33 > 0$.(2) Die Matrix ist somit indefinit / nicht negativ definit. (1)

Die Studenten müssen nicht zeigen, dass die Matrix indefinit ist, jedoch begründen, dass die Matrix nicht negativ definit ist.

2. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ eine Matrix. Zeigen Sie: Wenn A nur reelle Einträge hat und $A^T = -A$ gilt, dann ist A diagonalisierbar. (8)

Lösung: Es gilt $AA^T = -A^2 = A^T A$.(2 + 2) Die Matrix ist daher normal (2) und nach dem Spektralsatz (2) diagonalisierbar.

3. Seien $a \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & a \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$ und $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Finden Sie alle $x \in \mathbb{R}^3$ mit $Ax = b$. (10)

Lösung: Wir subtrahieren die dritte Zeile zwei bzw. drei Mal von der ersten bzw. zweiten Zeile. Dies ergibt, in erweiterter Matrixschreibweise,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & a & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & a & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -a & -1 \\ 0 & -1 & 1-3a & -2 \\ 1 & 2 & a & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) .(5)$$

Aus der ersten Ziele liest man ab, dass das LGS keine Lösung besitzt für $a = 0$, da der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix größer ist als der Rang von A (2). Sei daher im Folgenden $a \neq 0$. Aus der ersten Zeile folgt dann, dass $x_3 = 1/a$ gilt (1). Daraus folgt aus der zweiten Zeile

$$-x_2 + \frac{1}{a} = 1 \Longleftrightarrow x_2 = \frac{1}{a} - 1.(1)$$

Eingesetzt in die dritte Zeile ergibt dies

$$x_1 + 2\left(\frac{1}{a} - 1\right) = 2 \Longleftrightarrow x_1 = 4 - \frac{2}{a}.(1)$$

Somit:

- Falls $a \neq 0$, so ist $x = \begin{pmatrix} 4 - \frac{2}{a} \\ \frac{1}{a} - 1 \\ \frac{1}{a} \end{pmatrix}$.
- Falls $a = 0$, so hat das LGS keine Lösung.

4. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}$. (8+6)

(a) Berechnen Sie alle Eigenwerte von A und die dazu gehörigen Eigenräume. Zeigen Sie, dass A nicht diagonalisierbar ist.
Lösung: A ist eine obere Dreiecksmatrix und somit gilt für das charakteristische Polynom $p_A(\lambda) = (1-\lambda)^3$.(1) Daher ist 1 der einzige Eigenwert von A mit algebraischer Vielfachheit 3 (2).
Zur Berechnung des Eigenraumes:

$$A - 1 \cdot E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist der Eigenraum $Eig_A(1)$ zwei-dimensional (1)und $Eig_A(1) = \mathcal{LH}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ (2).
Damit ist die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes 1 kleiner als die algebraische Vielfachheit und somit ist A nicht diagonalisierbar (2).

(b) Zeigen Sie, dass $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Lösung: Wir behaupten, dass

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und beweisen diese Aussage per Induktion.
Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen/ ist die Aussage richtig (1). Sei nun die Behauptung für ein $n \geq 1$ richtig(1). Dann gilt nach der Induktionshypothese (1)

$$A^{n+1} = A^n A(1) = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (1) = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.(1)$$

5. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $T : V \to V$ eine lineare Abbildung. Außerdem sei $x \in V$ ein Vektor mit den Eigenschaften $T(x) \neq 0$ und $T^2(x) = 0$. Beweisen Sie, dass x und Tx linear unabhängig sind. (8)

Hinweis zur Notation: Die Abbildung $T^2 : V \to V$ ist definiert als die Hintereinanderausführung von T mit sich selbst, d.h. es gilt $T^2(v) = T(T(v))$ für alle $v \in V$.
Lösung: Seien $\lambda, \mu \in K$ derart, dass

$$0 = \lambda x + \mu T(x)(1)$$

gilt. Hieraus folgt, wegen der Linearität (1)von T:

$$0 = T(0) = T(\lambda x + \mu T(x))(1) = \lambda T(x) + \mu T^2(x)(1) = \lambda T(x)(1)$$

nach Annahme. Da $T(x) \neq 0$, muss $\lambda = 0$ gelten (1). Daraus folgt dann $0 = \mu T(x)$ und mit dem gleichen Argument $\mu = 0$.(1) Somit $0 = \lambda = \mu$. Also sind x und $T(x)$ linear unabhängig. (1)

6. Sei $n \in \mathbb{N}$. (5+5)

(a) Entscheiden Sie, ob die Menge $U := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ ist.
Lösung: Diese Menge ist kein Unterraum des $\mathbb{R}^n$, da $\|0\| = 0$.(2) Somit ist der Nullvektor nicht in der Menge enthalten, muss aber in jedem Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ enthalten sein (3).
Alternative: Sei e_1 der erste kanonische Einheitsvektor des $\mathbb{R}^n \in U$. Dann gilt $\|2e_1\| = \|e_1 + e_1\| = 2,$(2) also ist U nicht abgeschlossen bzgl. der Addition bzw. der skalaren Multiplikation und daher kein Untervektorraum (3).
2 Punkte für das Gegenbeispiel, 3 Punkte für die Begründung, warum es daher kein UVR ist.

(b) Entscheiden Sie, ob $\{A \in GL_n(\mathbb{C}) : |\det A| = 1\}$ eine Untergruppe von $GL_n(\mathbb{C})$ ist.
Lösung: Da $\det E = 1$, ist die Menge nicht leer(1). Seien nun A, B in der Menge enthalten. Dann gilt nach dem Determinantenmultiplikationssatz $|\det AB^{-1}| = |\det A||\det B^1| = |(\det B)^{-1}| = 1$(2). Aus dem Untergruppenkriterium folgt dann die Behauptung.(2)

7. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und sei U ein Untervektorraum von V. Für $x, y \in V$ schreiben wir $x \sim y$, falls $x - y$ senkrecht auf jedem Vektor $u \in U$ steht, d.h. falls $x - y \perp u$ für alle $u \in U$ gilt. (10)

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf V ist.
Lösung: Seien im Folgenden $x, y, z \in V$ und $u \in U$ beliebig (1). Es gilt $x - x = 0 \perp u$, also gilt $x \sim x$.(2)
Seien nun $x \sim y$. Dann gilt $\langle y - x, u \rangle = -\langle x - y, u \rangle = 0,$(2) da $x \sim y$. Also gilt $y \sim x$.(1)
Sei nun $x \sim y$ und $y \sim z$. Dann gilt $\langle x - z, u \rangle = \langle x - y + y - z, u \rangle$(2) $= \langle x - y, u \rangle + \langle y - z, u \rangle = 0 + 0 = 0$(1). Also gilt $x \sim z$.(1)
Somit ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf V.

Bitte umblättern!

8. Es sei Π_2 der Vektorraum aller Polynome vom Grad ≤ 2 auf $\mathbb{R}$. Sei $T : \Pi_2 \to \Pi_2$ definiert durch $Tp(x) = 2p(x) - xp'(x)$, wobei $p'(x)$ die erste Ableitung von $p(x)$ bezeichnet. Sei ferner $B = \{1, x, x^2\}$ die Monombasis von Π_2. (5+5)

(a) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $A(T; B; B)$.
Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} T1 &= 2 - x \cdot 0 = 2(1) \\ Tx &= 2x - x \cdot 1 = x(1) \\ Tx^2 &= 2x^2 - x \cdot 2x = 0(1). \end{aligned}$$

Somit gilt $A(T; B; B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.(2)

(b) Geben Sie $\ker T$ an.
Lösung: An der Darstellungsmatrix sieht man, dass $\dim \ker T = 1$ gilt(2). Daher ist $\ker T$ die lineare Hülle eines von Null verschiedenen Vektors aus dem Kern von T.(2) Aus dem vorherigen Aufgabenteil folgt, dass $0 \neq x^2 \in \ker T$. Somit ist $\ker T = \mathcal{LH}(x^2)$.(1)