Universität Ulm

Abgabe: -

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Attila Klimmek
Wintersemester 2016/17
Punktzahl: -

Lösungsvorschlag Lineare Algebra 1: Blatt 11, Aufgabe 51

51. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum von V. Für zwei Vektoren $v_1, v_2 \in V$ definieren wir $v_1 \sim v_2$ genau dann, wenn $v_2 - v_1 \in U$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf V ist. (2)

Lösungsvorschlag: *Reflexivität*: Sei $v \in V$. Dann gilt $v - v = 0 \in U$, da U ein Untervektorraum von V ist. Also ist $v \sim v$.

Symmetrie: Seien $v_1, v_2 \in V$ mit $v_1 \sim v_2$. Dann ist $v_2 - v_1 \in U$ und somit $v_1 - v_2 = -(v_2 - v_1) \in U$, da U ein Untervektorraum von V ist. Also gilt auch $v_2 \sim v_1$.

Transitivität: Seien $v_1, v_2, v_3 \in V$ mit $v_1 \sim v_2$ und $v_2 \sim v_3$. Dann gilt $v_2 - v_1 \in U$ und $v_3 - v_2 \in U$. Daraus folgt $v_3 - v_1 = (v_3 - v_2) + (v_2 - v_1) \in U$, da U ein Untervektorraum ist. Also gilt auch $v_1 \sim v_3$.

Damit ist gezeigt, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. $\square$

(b) Sei $v \in V$; laut Vorlesung ist die Äquivalenzklasse von v bezüglich $\sim$ definiert als die Menge $\{w \in V : w \sim v\}$. Wir definieren zudem $v + U := \{v + u : u \in U\}$. (2)

Zeigen Sie, dass die Äquivalenzklasse von v gleich $v + U$ ist.

Lösungsvorschlag: „$\subseteq$“ Sei w in der Äquivalenzklasse von v enthalten, d.h. es gelte $w \sim v$. Dann ist $v - w \in U$. Setze $u := w - v = -(v - w) \in U$. Dann ist $w = v + u \in v + U$.

„$\supseteq$“ Sei $w \in v + U$. Dann gibt es ein $u \in U$ mit $w = v + u$. Also ist $w - v = u \in U$, somit $v \sim w$ und folglich $w \sim v$. Also ist w in der Äquivalenzklasse von v enthalten. $\square$

(c) Nur für diese Teilaufgabe sei $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$ und $U = \{v \in \mathbb{R}^2 : v_1 = 0\}$. Skizzieren Sie die Äquivalenzklassen einiger Elemente von V. (2)

Lösungsvorschlag: Sei $v \in V = \mathbb{R}^2$. Dann ist die Äquivalenzklasse von v gleich der Geraden durch v, die parallel zur x_2-Achse ist. [Eine Skizze wurde in der Übung vorgestellt.]

(d) Es bezeichne V/U die Menge aller Äquivalenzklassen der Relation $\sim$, d.h. es sei (2)

$$V/U := \Big\{ \{w \in V : w \sim v\} \Big| \, v \in V \Big\} = \Big\{ v + U \Big| \, v \in V \Big\}.$$

Wir definieren zwei Abbildungen $\oplus : V/U \times V/U \to V/U$ und $\odot : K \times V/U \to V/U$ folgendermaßen: Für $v_1 + U, v_2 + U \in V/U$ und $\lambda \in K$ sei

$$(v_1 + U) \oplus (v_2 + U) := (v_1 + v_2) + U,$$
$$\lambda \odot (v_1 + U) := (\lambda v_1) + U.$$

Bei der Definition von $\odot$ gibt es jedoch ein Problem: Es kann verschiedene Vektoren $v_1, \tilde{v}_1$ geben, welche dieselbe Äquivalenzklasse haben, d.h. für welche $v_1 + U = \tilde{v}_1 + U$ gilt. Die obige Definition von $\lambda \odot (v_1 + U)$ hängt nun aber von v_1 ab; damit die Definition Sinn ergibt, muss sie dasselbe Ergebnis liefern, wenn wir v_1 durch irgend ein $\tilde{v}_1$ ersetzen, für welches $v_1 + U = \tilde{v}_1 + U$ gilt. Bevor man die Definition von $\odot$ verwenden darf, muss man zeigen, dass dies tatsächlich erfüllt ist („Man muss zeigen, dass $\odot$ wohldefiniert ist“).

Dasselbe Problem taucht auch bei der Definition von $\oplus$ auf.

Zeigen Sie: $\oplus$ und $\odot$ sind wohldefiniert, d.h.: Sind $v_1, \tilde{v}_1 \in V$ sowie $v_2, \tilde{v}_2 \in V$ und ist $v_1 + U = \tilde{v}_1 + U$ sowie $v_2 + U = \tilde{v}_2 + U$, so gilt

$$(v_1 + v_2) + U = (\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2) + U \quad \text{und} \quad (\lambda v_1) + U = (\lambda \tilde{v}_1) + U.$$

Lösungsvorschlag: *Vorbemerkung:* Allgemein gilt für eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf einer Menge X: Zwei Elemente x, y haben genau dann dieselbe Äquivalenzklasse, wenn $x \sim y$ gilt; dies folgt leicht aus den Eigenschaften einer Äquivalenzrelation.

Nun zur Aufgabe: Seien $v_1, \tilde{v}_1 \in V$ und $v_2, \tilde{v}_2 \in V$ mit $v_1 + U = \tilde{v}_1 + U$ und $v_2 + U = \tilde{v}_2 + U$. Dann haben v_1 und $\tilde{v}_1$ diesselbe Äquivalenzklasse, also gilt aufgrund der Vorbemerkung $v_1 \sim \tilde{v}_1$ und somit $\tilde{v}_1 - v_1 \in U$. Ebenso gilt $v_2 \sim \tilde{v}_2$ und somit $\tilde{v}_2 - v_2 \in U$.

Um $(v_1 + v_2) + U = (\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2) + U$ zu zeigen, müssen wir aufgrund der Vorbemerkung nur $v_1 + v_2 \sim \tilde{v}_1 + \tilde{v}_2$ beweisen. Dies ist aber tatsächlich wahr wegen

$$(\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2) - (v_1 + v_2) = (\tilde{v}_1 - v_1) + (\tilde{v}_2 - v_2) \in U$$

(wir haben wieder benutzt, dass U ein Untervektorraum ist).

Sei nun $\lambda \in K$. Um $(\lambda v_1) + U = (\lambda \tilde{v}_1 + U)$ zu zeigen, genügt es laut Vorbemerkung zu zeigen, dass $\lambda v_1 \sim \lambda \tilde{v}_1$ gilt. Dies ist aber erfüllt, denn es gilt (weil U ein Untervektorraum ist)

$$\lambda \tilde{v}_1 - \lambda v_1 = \lambda(\tilde{v}_1 - v_1) \in U.$$

Also folgt die Behauptung. □

(e) Zeigen Sie: $(V/U, \oplus, \odot)$ ist ein Vektorraum über K. (4)

Lösungsvorschlag: Wir rechnen die Vektorraumaxiome nach.

$\big((V/U), \oplus\big)$ ist eine abelsche Gruppe:

Für alle $v_1 + U, v_2 + U, v_3 + U \in V/U$ gilt

$$\begin{aligned}&(v_1 + U) \oplus \big((v_2 + U) \oplus (v_3 + U)\big) = (v_1 + U) \oplus \big((v_2 + v_3) + U\big) = \big(v_1 + (v_2 + v_3)\big) + U \\ =&\big((v_1 + v_2) + v_3\big) + U = \big((v_1 + v_2) + U\big) \oplus (v_3 + U) = \big((v_1 + U) \oplus)(v_2 + U)\big) + (v_3 + U)\end{aligned}$$

(für die Gleichheit zwischen erster und zweiter Zeile haben wir die Assoziativität der Addition auf V benutzt). Also ist die Verknüpfung $\oplus$ auf V/U assoziativ.

Weiterhin ist die Verknüpfung $\oplus$ auf V/U kommutativ, denn es gilt

$$(v_1 + U) \oplus (v_2 + U) = (v_1 + v_2) + U = (v_2 + v_1) + U = (v_2 + U) \oplus (v_1 + U)$$

für alle $v_1 + U, v_2 + U \in V/U$; hier haben wir verwendet, dass die Addition $+$ auf V kommutativ ist.

Zudem ist $0 + U \in V/U$ ein rechts-neutrales Element von $\oplus$, denn für alle $v + U \in V/U$ gilt

$$(v + U) \oplus (0 + U) = (v + 0) + U = v + U.$$

Schließlich müssen wir noch die Existenz von rechts-inversen Elementen zeigen. Sei $v + U \in V/U$. Dann gilt

$$(v + U) \oplus (-v + U) = (v + (-v)) + U = 0 + U,$$

also ist $-v + U$ rechts-invers zu $v + U$. Somit ist $(V, \oplus)$ tatsächlich eine abelsche Gruppe.

Restliche Vektorraumaxiome:

Seien $v + U, w + U \in V/U$ und $\lambda, \mu \in K$. Dann erhalten wir:

(a) Es ist

$$\lambda \odot \big(\mu \odot (v + U)\big) = \lambda \odot (\mu v + U) = \lambda(\mu v) + U = (\lambda\mu)v + U = (\lambda\mu) \odot (v + U).$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}&(\lambda + \mu) \odot (v + U) = \big((\lambda + \mu)v + U)\big) = \big((\lambda v + \mu v) + U\big) \\ &= (\lambda v + U) \oplus (\mu v + U) = \lambda \odot (v + U) \oplus \mu \odot (v + U).\end{aligned}$$

(c) Es ist

$$\begin{aligned}&\lambda \odot \big((v + U) \oplus (w + U)\big) = \lambda \odot \big((v + w) + U\big) = \big(\lambda(v + w) + U\big) \\ &= \big((\lambda v + \lambda w) + U\big) = (\lambda v + U) \oplus (\lambda w + U) = \lambda \odot (v + U) \oplus \lambda \odot (w + U).\end{aligned}$$

(d) Es gilt

$$1 \odot (v + U) = (1 \cdot v + U) = v + U.$$

Also ist $(V, \oplus, \odot)$ tatsächlich ein Vektorraum über K. □