

## Blatt 1

(Besprechung am 03.11.2011)

### Aufgabe 1. (Probleme eingeschränkt auf Bäume)

Gebt einfache Linearzeitalgorithmen für die Probleme VERTEX COVER und DOMINATING SET an, wenn die Eingabegraphen auf Bäume eingeschränkt sind.

VERTEX COVER

**Eingabe:** Ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$  sowie eine positive ganze Zahl  $k$ .

**Frage:** Gibt es eine Knotenmenge  $C \subseteq V$  der Größe  $\leq k$ , so dass jeder Kante aus  $E$  mindestens einen Endpunkt in  $C$  hat?

DOMINATING SET

**Eingabe:** Ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$  sowie eine positive ganze Zahl  $k$ .

**Frage:** Gibt es eine Knotenmenge  $V' \subseteq V$  der Größe  $\leq k$ , so dass jeder Knoten von  $V$  entweder in  $V'$  enthalten ist oder aber einen Nachbarn in  $V'$  hat?

### Aufgabe 2. (Datenreduktionsregeln bei MAXSAT)

Das NP-schwere Problem MAXSAT ist wie folgt definiert:

MAXSAT

**Eingabe:** Eine aussagenlogische Formel in konjunktiver Normalform sowie eine positive ganze Zahl  $k$ .

**Frage:** Gibt es eine Variablenbelegung, durch die mindestens  $k$  Klauseln der Formel erfüllt werden?

Nachfolgend sind einige (vermeintliche) Reduktionsregeln für MAXSAT angegeben. Wir nehmen dabei an, dass in einer Klausel eine Variable höchstens einmal vorkommt. Entscheidet jeweils über die Korrektheit der vorgeschlagenen Regeln (Begründung!).

1. Gibt es in  $F$  eine Klausel bestehend aus nur einem Literal, so belege die zugehörige Variable entsprechend und erniedrige  $k$  um 1.
2. Kommt in  $F$  eine Variable  $x$  z.B. ausschließlich nichtnegiert vor, so kann diese Variable mit wahr belegt werden und  $k$  ist um die Anzahl der Vorkommen von  $x$  in  $F$  zu erniedrigen.
3. Kommen in  $F$  die „Monoklauseln“  $(x)$  und  $(\bar{x})$  vor, so lösche beide Klauseln und erniedrige  $k$  um 1.

4. Die Variablen  $x$ ,  $y$ , und  $z$  kommen in  $F$  ausschließlich in folgenden drei Klauseln vor:  $(x \vee y) \wedge (\bar{y} \vee z) \wedge (\bar{z} \vee \bar{x})$ . Dann lösche die drei Klauseln und erniedrige  $k$  um 3.
5. Die Variable  $x$  komme ausschließlich in folgenden drei Klauseln vor:  $(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (\bar{x})$ . Dann ersetze  $x$  durch  $y$  und lasse  $k$  unverändert.
6. Die Variable  $x$  komme ausschließlich in folgenden drei Klauseln vor:  $(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (\bar{x})$ . Dann ersetze  $x$  durch  $\bar{y}$  und erniedrige  $k$  um 1.

Hinweis: Ein Literal ist eine negierte oder nichtnegierte aussagenlogische Variable.

**Aufgabe 2. (CLUSTER VERTEX DELETION)**

Ein Cluster-Graph ist ein Graph, in dem jede Zusammenhangskomponente eine Clique ist.

- a) Zeige, dass ein Graph genau dann ein Cluster-Graph ist, wenn er keinen  $P_3$  als induzierten Teilgraphen hat. Dabei ist  $P_3$  ein Pfad mit 3 Knoten.

Das CLUSTER-VERTEX DELETION-Problem taucht bei der Auswertung von DNA-Microarray-Daten auf. Es ist wie folgt definiert:

CLUSTER VERTEX DELETION

**Eingabe:** Ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$  sowie eine positive ganze Zahl  $k$ .

**Frage:** Gibt es eine Knotenmenge  $C \subseteq V$  der Größe  $\leq k$ , so dass  $G$  nach dem Löschen aller Knoten in  $C$  ein Cluster-Graph ist?

- b) Zeige einen Problemkern der Größe  $O(k^3)$  für CLUSTER VERTEX DELETION.