

# Algorithmen für schwierige Probleme

Britta Dorn

**Wintersemester 2011/12**

27. Oktober 2011

$(F, k)$  Ja-Instanz  $\Leftrightarrow (F_s, k - L)$  Ja-Instanz

Beispiel: Variablen  $x_1, \dots, x_7$ ,  $k = 5$ ,  $L = 2$

(5 Klauseln sollen erfüllt werden, es gibt 2 lange Klauseln, ab 5 Variablen zählt Klausel als lang)

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_5) \wedge (x_3 \vee x_4) \wedge (x_7 \vee x_5) \wedge (x_6) \wedge \\ (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_6) \wedge (x_7 \vee x_6 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)$$

Um 3 kurze Klauseln zu erfüllen, wären 3 verschiedene Variablen ausreichend, z.B.

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_5) \wedge (x_3 \vee x_4) \wedge (x_7 \vee x_5) \wedge (x_6)$$

(damit sind dann 3 Variablen "verbraucht".) Die langen Klauseln bestehen aber aus mind. 5 versch. Variablen, also bleiben mind. 2 "unverbrauchte" Variablen übrig, z.B.  $x_4$  und  $x_5$ :

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_6) \wedge (x_7 \vee x_6 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)$$

Diese beiden reichen aus, um die beiden langen Klauseln zu erfüllen (je eine Variable kümmert sich um eine Klausel)

$(F, k)$  Ja-Instanz  $\Leftrightarrow (F_s, k - L)$  Ja-Instanz

Neues Beispiel: (wieder  $k = 5$ ,  $L = 2$ )

$$\begin{aligned} & (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_2) \wedge \cdots \wedge (x_1 \vee x_2) && (10 \text{ mal}) \\ & \wedge (x_3 \vee x_4) \wedge (x_3 \vee x_4) \wedge \cdots \wedge (x_3 \vee x_4) && (10 \text{ mal}) \\ & \wedge (x_5 \vee x_1) \wedge (x_5 \vee x_1) \wedge \cdots \wedge (x_5 \vee x_1) && (10 \text{ mal}) \\ & \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \end{aligned}$$

Mit (z.B.)  $x_1 = 1$  und  $x_3 = 1$  lassen sich alle 30 Klauseln aus  $F_s$  erfüllen. Wird aber z.B.  $x_1 = x_2 = 0$  gewählt, so lassen sich nur noch 20 kurze Klauseln erfüllen (aber 2 lange Klauseln sind erfüllt).

Klar: das ist so nicht optimal. Aber die Frage ist nur: Kann man in der gesamten Formel **5** Klauseln erfüllen? (auch wenn der kurze Teil ganz kompliziert wäre)

Die Aussage ist: der lange Teil lässt sich immer erfüllen (es sind genug Variablen übrig), der harte Kern ist also nur der kurze Teil!