15.11.2011

Verbesserter Suchbaum für Vertex Cover

Ins VC aufgenommene Knoten werden zusammen mit ihren inzidenten Kanten aus G gelöscht. Unterscheide folgende Fälle, wende immer den Fall mit der kleinsten Nummer an.

Fall 1: $\exists$ Grad-1-Knoten v mit Nachbar a.
$\Rightarrow$ Nimm a in VC auf. Keine Verzweigung.

Fall 2: $\exists$ Grad-5-Knoten v mit $N(v) = \{a, b, c, d, e\}$.
$\Rightarrow$ Nimm entweder v oder $N(v)$ in VC auf.
Branchingvektor: $(1, 5)$.

Fall 3: $\exists$ Grad-2-Knoten v mit $N(v) = \{a, b\}$.
genauere Fallunterscheidungen:

(1) $\exists$ Kante $\{a, b\}$.
$\Rightarrow$ Nimm a und b ins VC auf. Keine Verzweigung.

(2) $\nexists$ Kante $\{a, b\}$ und $N(a) = N(b) = \{v, c\}$.
$\Rightarrow$ Nimm v und c ins VC auf (brauche zwei Knoten, c ist günstiger). Keine Verzweigung.

(3) $\nexists$ Kante $\{a, b\}$ und $|N(a) \cup N(b)| \geq 3$.
$\Rightarrow$ Nimm entweder $N(v)$ oder $N(a) \cup N(b)$ ins VC auf.

Denn: Falls v nicht im VC ist, dann brauche a und b $(= N(v))$. Falls v im VC ist, dann brauche a und b nicht, aber dafür dann Abdeckung für die von a und b ausgehenden Kanten, also $N(a) \cup N(b)$.

Branchingvektor $(2, 3)$.

Fall 4: $\exists$ Grad-3-Knoten v mit $N(v) = \{a, b, c\}$.
genauere Fallunterscheidungen:

(1) $\exists$ Kante zwischen zwei Nachbarknoten von v, o.E. $\{a, b\}$ (dort ist sicher eine Kante, es kann aber auch noch zusätzlich die Kanten $\{a, c\}$ oder $\{b, c\}$ geben).
$\Rightarrow$ Nimm entweder $N(v) = \{a, b, c\}$ [das ist besser, falls es keine Kante zwischen c und a oder b gibt] oder $N(c)$ [das ist besser, falls es Kanten zwischen c und a oder b gibt] ins VC auf.

Denn: Falls v nicht im VC ist, dann brauche auf jeden Fall $\{a, b, c\} = N(v)$. Falls v im VC ist, dann auch a oder b (wegen der Kante $\{a, b\}$, die abgedeckt sein muss). Würde man dann auch noch zusätzlich c ins VC aufnehmen, dann wäre $\{a, b, c\} = N(v)$ ein besseres VC als $\{v, a, c\}$ oder $\{v, b, c\}$. Also: Falls v im VC ist, dann braucht man c nicht, aber dann kann man gleich mit Sicherheit $N(c)$ aufnehmen (darin ist v und noch andere Knoten, a und/oder b und evtl noch weitere).

Branchingvektor $(3, 3)$.

(2) $\exists$ gemeinsamen Nachbarn d zweier Nachbarn von v, der verschieden von v ist. O.E. sei d Nachbar von a und b.

$\Rightarrow$ Nimm entweder $N(v) = \{a, b, c\}$ oder $\{v, d\}$ ins VC auf.

Falls v nicht im VC ist, dann brauche $\{a, b, c\}$. Falls v im VC ist, gilt: wenn man d nicht nimmt, muss man a und b nehmen, also ist $\{v, d\}$ die bessere Wahl (statt $\{v, a, b\}$).

Branchingvektor $(3, 2)$.

(3) $\nexists$ Kante zwischen Elementen aus $N(v)$ und einer der Nachbarn in $N(v)$ habe Grad ≥ 4. Sei dies o.E. a mit $N(a) = \{v, a_1, a_2, a_3\}$.
$\Rightarrow$ Nimm entweder $N(v) = \{a, b, c\}$ oder $N(a) = \{v, a_1, a_2, a_3\}$ oder $\{a\} \cup N(b) \cup N(c)$ ins VC auf.

Falls v nicht im VC ist, dann brauche $N(v)$.
Falls v im VC ist, aber a nicht: dann brauche $N(a)$ sicher.
Falls v im VC ist und a auch: dann brauche b und c nicht mehr, dann aber $N(b) \cup N(c)$.

Es gilt: $N(b) \cap N(c) = \{v\}$ (sonst wären wir im Fall 4.(2), und in diesem Fall hier ist die Voraussetzung, dass es keine Kanten zwischen a, b, c gibt). Außerdem $|N(b) \cup N(c)| \geq 5$: Jeder Knoten hat mindestens Grad 3, sonst wären wir nicht bis zu diesem Fall gekommen, also als Nachbarn mindestens Knoten v und zwei weitere.

Branchingvektor $(3, 4, 6)$.

(4) sonst: d.h. $\nexists$ Kante zwischen Elementen aus $N(v)$ und alle Elemente aus $N(v)$ besitzen genau Grad 3.
$\Rightarrow$ Nimm entweder $N(v) = \{a, b, c\}$ oder $N(a) = \{v, a_1, a_2\}$ oder $N(b) \cup N(c) \cup N(a_1) \cup N(a_2)$ ins VC auf.

Falls v nicht im VC ist, dann brauche $N(v)$.
Falls v im VC ist, aber a nicht, dann brauche v und die beiden anderen Nachbarn von a sicher.
Falls v im VC ist und a auch, dann brauche a_1, a_2 nicht, aber $N(a_1) \cup N(a_2)$. Genauso mit b und c.

Es gilt: $N(b) \cap N(c) = \{v\}$ und $|N(b) \cup N(c)| = 5$, außerdem $a \in N(a_1)$ und $a \notin N(b) \cup N(c)$.

Branchingvektor $(3, 3, 6)$.

Fall 5: G ist 4-regulär (d.h.: jeder Knoten hat genau 4 Nachbarn)
$\Rightarrow$ Wähle beliebigen Knoten v, nimm entweder v oder $N(v)$ ins VC auf.

Branchingvektor $(1, 4)$.

Dieser Fall kann nur einmal auftreten, Teilgraphen enthalten danach mindestens einen Knoten mit Grad ≤ 3. Dieser Fall spielt also asymptotisch keine Rolle und kann daher bei der Laufzeitabschätzung weggelassen werden.

Insgesamt erhalten wir folgenden

Satz. VERTEX COVER *kann in Zeit* $O(kn + (1.342)^k \cdot k^2)$ *gelöst werden.*

Beweis.

Fall	Branchingvektor	Branchingzahl
1	–	–
2	$(1, 5)$	1.325
3.1	–	–
3.2	–	–
3.3	$(2, 3)$	1.325
4.1	(3,3)	1.260
4.2	(3,2)	1.325
4.3	(3,4,6)	1.305
4.4	(3,3,6)	1.342
5	(1,4)	1.381