ulm university universität ulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Jun.-Prof. PD Dr. Delio Mugnolo
delio.mugnolo@uni-ulm.de

Dr. Arthur Gerber
arthur.gerber@uni-ulm.de

Übungen - Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Abgabe: bis 08.05.2014, 12:10 Uhr in H3

(30 Punkte entsprechen 100%)

1. *(Matrixexponential)* Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann ist das Exponential der Matrix A definiert durch die Potenzreihe
$$exp(A) := e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \ .$$
Zeige:
   (a) Ist B invertierbar, so gilt $e^{BAB^{-1}} = Be^A B^{-1}$.
   (b) Ist $AB = BA$, so gilt $e^{A+B} = e^A e^B$.
   (c) Ist A idempotent, so gilt $e^{tA} = I + A(e^t - 1)$ mit $t \in \mathbb{R}$ und I bezeichnet die Einheitsmatrix.

   (8 Punkte)

2. *(Ableitung einer Matrix)* Sei $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

   Funktionen $a_{ij} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i, j = 1, \dots, n)$.

   Die Ableitung $\frac{d}{dt}A(t) := A'(t)$ der Matrix A ist komponentenweise definiert.

   Zeige:
   (a) Das Produkt zweier differenzierbarer Matrizen $A(t), B(t)$ ist differenzierbar und es gilt
$$\frac{d}{dt}\left(A(t)B(t)\right) = A'(t)B(t) + A(t)B'(t) \ .$$
   (b) Ist $A(t)$ invertierbar, so ist auch die Inverse $A^{-1}(t)$ differenzierbar und es gilt
$$\frac{d}{dt}A^{-1}(t) = -A^{-1}(t)A'(t)A^{-1}(t) \ .$$
   (c) Für $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist e^{Ct} $(t \in \mathbb{R})$ differenzierbar und es gilt
$$\frac{d}{dt}e^{Ct} = Ce^{Ct} \ .$$

   (8 Punkte)

3. Bestimme die Lösung der folgenden Cauchy-Probleme:

   (a) $y'(t) + y(t)\tan(t) = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{2}; \quad t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

   (b) $y'(t) + y(t)\tan(t) = \cos(t), \quad y(0) = \frac{\pi}{2}; \quad t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

   (c) $y'(t) + \frac{2y(t)}{1-t^2} = 1 - t, \quad y(0) = \frac{1}{2}; \quad t \in (-1, 1)$

(8 Punkte)

4. *(Kondensator)* Ein Kondensator mit Kapazität $C > 0$ und ein Widerstand $R > 0$ werden hintereinander geschaltet und eine zeitabhängige Spannung $U(t)$ angelegt. Für den fließenden Strom $I(t)$ gilt dann die Differentialgleichung

$$RI'(t) + \frac{1}{C}I(t) = U'(t) \ .$$

   Bestimme die Lösung dieser DGL mit Anfangswert $I(0) = I_0 > 0$

   (a) für den Gleichspannungsfall $U(t) \equiv U_0, \quad U_0 > 0.$

   (b) für die angelegte Wechselspannung $U(t) = U_0 \sin(\omega t), \quad U_0 > 0, \omega > 0.$

   Wie verhält sich jeweils die Lösung für $t \to \infty$?

(8 Punkte)

5. Löse folgende Cauchy-Probleme:

   (a) $y'(t) = e^{y(t)} \sin(t), \quad y(0) = 0$

   (b) $y'(t) = e^t y(t), \quad y(0) = 1$

(6 Punkte)