ulm university universität ulm

Fakultät für Mathematik und
Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Jun.-Prof. PD Dr. Delio Mugnolo
delio.mugnolo@uni-ulm.de

Dr. Arthur Gerber
arthur.gerber@uni-ulm.de

Übungen - Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Abgabe: bis 15.05.2014, 12:15 Uhr in H3

(30 Punkte entsprechen 100%)

6. (a) Löse die folgende Bernoulli-Differenzialgleichung:

$$y'(t) = y^4(t)\cos(t) + y(t)\tan(t), \qquad y(0) = \frac{1}{2}$$

(b) Löse die folgende Riccati-Differenzialgleichung:

$$y'(t) = 2t - \frac{y(t)}{t} + \frac{y^2(t)}{t^3}, \qquad t > 0$$

(Hinweis: Die spezielle Lösung lässt sich leicht erraten.)

(c) Löse folgendes Anfangswertproblem höherer Ordnung:

$$(1+t^2)y''(t) = 1 - 2ty'(t), \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

(Hinweis: Führe eine geeignete Substitution durch.)

(4+4+4 Punkte)

7. Seien f, g lokal Lipschitz-stetige Funktionen. Zeige:
   (a) Das Produkt $f \cdot g$ ist lokal Lipschitz-stetig.
   (b) Die Verkettung $f \circ g$ ist lokal Lipschitz-stetig.

   Bestimme auch jeweils eine zugehörige Lipschitz-Konstante.

(6 Punkte)

8. Untersuche, ob die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf dem gegebenen Rechteck in der zweiten Variablen global Lipschitz-stetig sind.
   (a) $f(t,x) = \sqrt[3]{x}$ auf $[0,1) \times (x_0 - s, x_0 + s),\ 0 < s < x_0$
   (b) $f(t,x) = \sqrt[3]{x}$ auf $[0,1) \times (0,s),\ s > 0$

(6 Punkte)

9. Zeige, dass das Anfangswertproblem

$$y'(t) = y(t)e^{t^2-16}\cos(t^5+4)\ , \quad y(1) = 1$$

auf dem Intervall $[-2,4]$ genau eine Lösung besitzt.

(6 Punkte)