ulm university universität uulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Jun.-Prof. PD Dr. Delio Mugnolo
delio.mugnolo@uni-ulm.de

Dr. Arthur Gerber
arthur.gerber@uni-ulm.de

Übungen - Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Abgabe: bis 22.5.2014, 12:15 Uhr in H3

(30 Punkte entsprechen 100%)

10. *(Fixpunktsatz von Weissinger)* Seien X ein vollständiger, metrischer Raum, $\emptyset \neq M \subset X$ abgeschlossen, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ eine konvergente Reihe mit $\alpha_n > 0$ und $T : M \to M$ eine Abbildung mit

$$d(T^n x, T^n y) \leq \alpha_n d(x, y) \quad \forall x, y \in M \;\; \forall n \in \mathbb{N} .$$

   (a) Zeige: T hat genau einen Fixpunkt ξ. Der Fixpunkt ist der Grenzwert der Iterationsfolge $(T^n x_0)_{n\in\mathbb{N}}$ mit beliebigem Startwert $x_0 \in M$.
   (Hinweis: Zeige zunächst, dass die Folge $x_n := T^n x_0$ eine Cauchyfolge ist.)

   (b) Beweise die Fehlerabschätzung

$$d(\xi, x_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k d(x_1, x_0) .$$

   (Hinweis: Verwende eine Abschätzung aus (a) und betrachte einen geeigneten Limes.)

   (c) Zeige mit Teil (a) den Satz von Banach. (Satz 3.24 aus der Vorlesung)

(12 Punkte)

11. *(Wachstumsgleichungen)* Betrachte die Differenzialgleichung

$$y'(t) = \alpha y(t) - \beta (y(t))^{1-\gamma}$$

mit $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ und $\gamma \in \mathbb{R}$. Diese beschreibt z.B. für $\beta = 0$ das exponentielle Wachstum (Bsp. 1.4 aus der Vorlesung) und für $\beta > 0, \gamma = -1$ das logistische Wachstum (Bsp. 1.5 aus der Vorlesung).

   (a) Löse die Differenzialgleichung zum Anfangswert $y(0) = 1$ und gib das zugehörige Lösungsintervall an.

   (b) Skizziere jeweils den Graphen der Lösung für $\gamma = -1$.

(Hinweis: Fallunterscheidung in Abhängigkeit der Parameter!)

(10 Punkte)

12. *(Iterationsverfahren zum Lösen von Differenzialgleichungen)* Das Cauchyproblem $y'(t) = f(t, y(t)),\ \ y(t_0) = y_0$ besitze auf dem Intervall I die eindeutige Lösung $y(t)$. Diese ist durch den Grenzwert der iterierten Folge

$$y_n(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))\, ds \quad n \in \mathbb{N},\ t \in I$$

gegeben. (Das zeigt der Satz von Picard-Lindelöf.)

(a) Bestimme die Lösung des Cauchyproblems $y'(t) = y(t),\ y(0) = 1$ als Grenzwert der Folge $((y_n(t)))_{n\in\mathbb{N}}$ mit Startwert $y_0(t) \equiv 1$.

(b) Zeichne die Iterationen $y_1(t), \ldots, y_4(t)$ und die exakte Lösung $y(t)$ in ein gemeinsames Schaubild für $t \in [-2, 1]$.
(Hinweis: Die Graphen dürfen mit maple/matlab etc. gezeichnet werden.)

(6 Punkte)

13. *(Regularität von Lösungen)* Sei $y : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differenzialgleichung $y'(t) = f(t, y(t))$, wobei $f : (a, b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar ist.
Zeige: Die Lösung y ist auch beliebig oft differenzierbar.

(4 Punkte)