ulm university universität uulm

**Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften**
Institut für Analysis

**Jun.-Prof. PD Dr. Delio Mugnolo**
delio.mugnolo@uni-ulm.de

**Dr. Arthur Gerber**
arthur.gerber@uni-ulm.de

# Übungen - Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Abgabe: **bis Mittwoch, 28.5.2014**, 13:30 Uhr in H3

(25 Punkte entsprechen 100%)

14. *(Satz von Peano)* Wir geben einen alternativen Beweis des Satzes von Peano mit Hilfe des Schauderschen Fixpunktsatzes. Letzterer darf als bekannt/bewiesen vorausgesetzt werden und lautet:
*Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $\emptyset \neq K \subset X$ abgeschlossen und konvex. Sei weiter die Abbildung $A : K \to K$ stetig und $A(K)$ relativ kompakt. Dann besitzt $A$ einen Fixpunkt.*

    Zeige damit den Satz von Peano :
*Es sei $f : R \to \mathbb{R}$ stetig mit $R := \{(t, y) : |t - t_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ und $a, b > 0$.*
*Weiter seien $M := \max_{(t,y)\in R} |f(t, y)|$ und $\alpha := \min\{a, b/M\}$.*
*Dann gibt es auf $J := [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ (mindestens) eine Lösung des Anfangswertproblems (AWP)*

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0 .$$

    Hinweise zu einer möglichen Vorgehensweise: Mit der Maximumsnorm $\|y\| := \|y\|_{C(J)} := \max_{t\in J} |y(t)|$ wird $C(J)$ zu einem Banachraum. Betrachte die Menge $K := \{y \in C(J) : \|y - y_0\|_{C(J)} \leq b\}$.

    (a) Formuliere das (AWP) als äquivalentes Fixpunktproblem mit einer Abbildung $A : K \to K$. (Betrachte Picard-Operator aus Satz 3.28)
    (b) Zeige, dass es sich bei $A$ um eine stetige Selbstabbildung handelt.
    (c) Zeige: $K$ ist nicht-leer, abgeschlossen und konvex.
    (d) Zeige: $A(K)$ ist relativ kompakt. (Folgende Version des Satzes von Arzela-Ascoli kann als bekannt vorausgesetzt werden: $A(K)$ ist genau dann relativ kompakt in $C(J)$ mit der Supremumsnorm, wenn $A(K)$ gleichgradig stetig und punktweise beschränkt ist.)

    (3+4+3+4 Punkte)

15. Zeige mit Aufgabe 14, dass das (AWP)

$$y'(t) = (t + \sin y(t))^2, \quad y(0) = 3$$

    auf dem Intervall $[-c, c]$ mit $c > 1$ eine Lösung besitzt.

    (5 Punkte)

16. Es sei $f : [c, d] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann hat das (AWP)

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

auf ganz $[c, d]$ eine Lösung mit beliebig gegebenen $t_0 \in [c, d]$ und $y_0 \in \mathbb{R}$.
(Hinweis: Modifiziere den Beweis aus Aufgabe 14.)

(5 Punkte)

17. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $F$ eine Stammfunktion von $f$ und $y : I \to \mathbb{R}$ Lösung von $y'(t) = f(y(t))$ auf dem offenen Intervall $I$. Weiter gelte $F(y(t_1)) = F(y(t_2))$ für verschiedene $t_1, t_2 \in I$.
Zeige: $y$ ist konstant auf dem Intervall $[t_1, t_2]$.
(Hinweis: Untersuche das Monotonieverhalten von $F \circ y$.)

(5 Punkte)