Dr. M. Harder 02.05.2017
Blatt 02

Übungen zu Mathematik im Orientierungssemester

(24 Punkte entsprechen 100%, Abgabe spätestens am Dienstag, den 09.05.2017 vor den Übungen)

1. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass folgende Behauptungen für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten:
   (a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
   (b) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

(3 + 3 Punkte)

2. Schreiben Sie den Ausdruck $\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} \frac{j^3}{k^2}$ in geschlossener Form (ohne Summenzeichen).
   Hinweis: Eventuell sind die Resultate der ersten Aufgabe hilfreich.

(4 Punkte)

3. Berechnen Sie die folgenden Binomialkoeffizienten, sofern sie definiert sind, oder begründen Sie, weshalb sie nicht definiert sind:
$$\binom{5}{9}, \binom{-9}{5}, \binom{2{,}5}{4}, \binom{4}{2{,}5}, \binom{-\frac{5}{2}}{4}, \binom{5}{-4}, \binom{10^{1010}}{10^{1010}-1}, \binom{49}{6}$$
   Geben Sie bei jeder Berechnung mindestens einen Zwischenschritt an.

(4 Punkte)

4. Bei einer Lotterie werden aus einem Gefäß mit n Kugeln (die von 1 bis n nummeriert sind) k Kugeln gezogen ($n, k \in \mathbb{N}$ und $k \leq n$, ohne Zurücklegen). Jedes der $\binom{n}{k}$ möglichen Ergebnisse der Ziehung ist gleich wahrscheinlich. Bei welcher der folgenden Lotterien ist ein Gewinn am wahrscheinlichsten bzw. die Anzahl der möglichen Ziehungsergebnisse am geringsten?
   - Österreich: 5 aus 90.
   - Deutschland: 6 aus 49.
   - Finnland: 7 aus 39.

   Begründen Sie Ihre Antwort.

(2 Punkte)

5. Es sei $q > 0$ und für $n \in \mathbb{N}$ gelte $a_n := \frac{q^n}{n!}$. Außerdem sei $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geq q$ gegeben.
   (a) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n=n_0}^{\infty}$ monoton ist.
   (b) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n=n_0}^{\infty}$ beschränkt ist.
   (c) Konvergiert die Folge $(a_n)_{n=n_0}^{\infty}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(2 + 2 + 1 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

6. Es sei $a_n := \frac{n^2+(-1)^n}{n^2}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nicht monoton ist.

(b) Bestimmen Sie ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - 1| < 10^{-4}$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

(c) Zeigen Sie mit der Definition der Konvergenz, dass die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert.

(2 + 1 + 2 Punkte)

Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Mehrere Blätter sollten getackert werden. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.