UNIVERSITÄT ULM

Abteilung für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

# Übungen zur Höheren Mathematik für Physiker II

Dr. Hartmut Lanzinger, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 12 Punkte

## Übungsblatt 3

Abgabe: Mittwoch, 7. Mai 2008, vor den Übungen

1. Zeige: Ist $A$ symmetrisch und invertierbar, so ist auch $A^{-1}$ symmetrisch.

1 Punkt

2. Wir betrachten $\mathbb{C} = \mathbb{C}_{\mathbb{R}}(= \mathbb{R}^2)$ als Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, und es sei $F : \mathbb{C}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ definiert durch

$$F(a) := \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

für $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Zeige:

(a) $F \in L(\mathbb{C}_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}^{2\times 2})$ und $Im(F) \cong \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$.

(b) $F(ab) = F(a)F(b)$ für $a, b \in \mathbb{C}$.

(c) $F(\overline{a}) = (F(a))^T$ für $a \in \mathbb{C}$.

3 Punkte

3. Es seien $V$, $W$ Vektorräume über $\mathbb{K}$ und $F \in L(V, W)$. Dann gilt:

   (a) Im(F) ist ein Unterraum von $W$ mit $\dim Im(F) \leq \dim V$.

   (b) Kern(F) ist ein Unterraum von $V$.

2 Punkte

4. Es sei $\nu_1, \ldots, \nu_n$ eine Basis von V. Zeige, daß $(\langle \nu_j, \nu_k \rangle)_{j,k=1}^n$ positiv definit ist.

1 Punkt

5. Es sei $f \in L(V, W)$ bijektiv. Zeige, daß dann auch $f^{-1}$ linear ist.

1 Punkt

6. (a) Sind die folgenden Abbildungen linear?

      i. $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2, f(x, y) = (x + y, x)$

      ii. $g : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^3, g(x, y) = (x + 1, 2y, x + y)$

      iii. $D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], Dp = p'$

   (b) Bestimme von der Abbildung $D$ aus $(iii)$ Kern und Bild des Operators.

2 Punkte

7. Zeige, daß für $F \in L(V, W)$ mit $V$, $W$ Vektorräume über $\mathbb{K}$ gilt:

   (a) $F$ ist injektiv $\Leftrightarrow$ Kern(F)= $\{0\}$.

   (b) $F$ ist surjektiv $\Leftrightarrow$ Rang(F)= $\dim W$, wenn $\dim W$ endlich ist.

   (c) $\dim W < \dim V \Rightarrow F$ ist nicht injektiv.

   (d) $\dim V < \dim W \Rightarrow F$ ist nicht surjektiv.

2 Punkte