UNIVERSITÄT ULM
Abteilung für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zur Höheren Mathematik für Physiker II

Dr. Hartmut Lanzinger, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 5

Abgabe: Mittwoch, 28. Mai 2008, vor den Übungen

1. Untersuche- soweit möglich- folgende Matrizen auf Definitheit:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \\ -3 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 & -7 \\ 3 & 0 & 4 \\ -7 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -5 \\ 2 & -5 & -20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 8 & 4 \\ -8 & -2 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2 Punkte

2. Entscheide, ob folgende Matrizen unitär diagonalisierbar sind. In diesem Falle führe die unitäre Diagonalisierbarkeit durch. Im anderen Falle bestimme ein unitäres U, so daß U^*AU eine obere Dreiecksmatrix ist (gemäß dem Lemma von Schur):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

6 Punkte

3. Führe, falls möglich für folgende Matrizen A die Hauptachsentransformation durch, d.h. berechne $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $U^* = U^{-1}$ und $U^{-1}AU = diag(\lambda_\nu)$. Skizziere für die erste Matrix die Punktmenge $\{x \in \mathbb{R}^3 |\ q_A(x) = x^T Ax = 1\}$. Berechne für die letzte Matrix A^r für $r \in \mathbb{N}_0$ und $Q(A)$ mit $Q(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + 24$.

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

7 Punkte

4. Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, und $\sigma(A) = \{\text{Eigenwerte von A}\}$ bezeichne das Spektrum von A. Zeige:

   (a) Wenn A idempotent ist, d.h. $A^2 = A$, dann gilt $\sigma(A) \subset \{0, 1\}$.

   (b) A und A^T haben dasselbe charakteristische Polynom, also $P_A = P_{A^T}$.

   (c) $\sigma(A) = \sigma(A^T)$, d.h. A und A^T haben dieselben Eigenwerte. Gilt das auch für die Eigenvektoren?

   (d) Wenn A nilpotent ist, d.h. $A^m = 0$ für ein gewisses $m \in \mathbb{N}$, folgt $\sigma(A) = \{0\}$.

4 Punkte

5. Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ positiv definit. Zeige: Es existiert A^{-1}, und A^{-1} ist ebenfalls positiv definit.

2 Punkte

6. Berechne die Spektralzerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} 54 & -18 & 36 \\ -18 & 54 & -36 \\ 36 & -36 & 108 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Es ist 144 ein einfacher und 36 ein doppelter Eigenwert von A.

3 Punkte