UNIVERSITÄT ULM
Abteilung für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

# Übungen zur Höheren Mathematik für Physiker II

Dr. Hartmut Lanzinger, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

## Übungsblatt 7

Abgabe: Mittwoch, 11. Juni 2008, vor den Übungen

1. Es sei $r > 0$.
   Bestimme den Flächeninhalt des *Möndchen des Hippokrates*:

$$M = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 \leq r^2, (x + r)^2 + y^2 \geq 2r^2\}$$

   Skizziere den Fall $r = 1$.

6 Punkte

2. Berechne folgende Integrale, falls existent:

   (a) $\int_M y\, dx\, dy$ mit $M = \{x, y)^T \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 1\}$

   (b) $\int_M ye^{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$, wobei $M = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 |\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0\}$

   (c) $\int_{U_r(0)} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz$.

3+3+3 Punkte

3. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^m$ heißt Lebesguesche Nullmenge im $\mathbb{R}^m$, falls zu jedem $\epsilon > 0$ eine Folge von Intervallen $(I_k)$ mit

$$M \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \epsilon$$

existiert.
Zeige: jede abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist wieder eine Nullmenge.

3 Punkte

4. Zeige:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

6 Punkte