Dr. H. Lanzinger
M. Weyhmüller

Winter 2011
13.01.2012
Blatt 11

Übungen zu Stochastik für Wiwi

(Abgabe: Fr., 20.01.2012, vor den Übungen)

1. Der französische Roulettekessel enthält die Zahlen 1–36, je zur Hälfte rot und schwarz, sowie die 0. Wir setzen bei jedem Spiel 1 Euro auf Rot oder Schwarz. Fällt die Kugel auf eine Zahl in der vorhergesagten Farbe, erhalten wir den Einsatz zurück und zusätzlich einen Gewinn von 1 Euro. Ansonsten verlieren wir den Einsatz (wir sehen gesperrte Einsätze bei Zéro als verloren an).

   Betrachte die Zufallsvariablen X_k (Gewinn im k-ten Spiel) und $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$ (Gesamtgewinn der ersten n Spiele).

   (a) Berechne Erwartungswert und Varianz von X_k und zeige, dass $\mathbb{E}(S_n) = -\frac{n}{37}$, sowie $\operatorname{Var}(S_n) = \frac{1368}{1369}n$ gilt.

   (b) Berechne mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes die Wahrscheinlichkeit nach 16 Spielen einen positiven Gesamtgewinn erzielt zu haben.

   (c) Wieviele Spiele kann man maximal spielen, so dass (nach der Näherung durch den zentralen Grenzwertsatz) die Wahrscheinlichkeit eines positiven Gesamtgewinns größer ist, als mit zwei Würfeln in einem Wurf acht oder eine höhere Augenzahl zu werfen?

   Hinweis: Man kann davon ausgehen, dass die möglichen Ergebnisse einer Runde alle mit derselben Wahrscheinlichkeit auftreten und dass die Ergebnisse verschiedener Spielrunden unabhängig voneinander sind.

   (1 + 1 + 2 Punkte)

2. Die Dichte f des Zufallsvektors $(X, Y)^\top$ ist durch

$$f(x,y) := \begin{cases} x(y-x)\,\mathrm{e}^{-y} & \text{falls } 0 \le x \le y < \infty \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   gegeben.

   Bestimme die bedingten Verteilungsfunktionen $F_{X|Y}$ und $F_{Y|X}$.

   (4 Punkte)

3. Es werden zwei faire Münzen gleichzeitig geworfen. Die Zufallsvariable S sei die Anzahl der Würfe mit dem Ergebnis „Zahl, Zahl" in 48 Versuchen.

   Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten jeweils exakt, sowie die Näherung durch den zentralen Grenzwertsatz mit und ohne Stetigkeitskorrektur.

   (a) $P(5 \le S \le 43)$

   (b) $P\big(S \le \mathbb{E}(S)\big)$.

   (2+2 Punkte)

4. Wir betrachten folgendes Beispiel aus der Vorlesung:

   Zur Vorbereitung auf eine Klausur durchläuft eine Gruppe A von Studenten ein spezielles Vorbereitunsgprogramm, eine Gruppe B absolviert dieses Programm nicht. Bei der Klausur ergeben sich folgende Punktzahlen:

A	106	106	74	146	116	122	72	114	92	110
B	66	112	52	86	92	110	108	78	112	96

   (a) Berechne das Stichprobenmittel und die Stichprobenvarianz, jeweils für alle Studenten und für beide Gruppen getrennt.

   (b) Zeichne die empirischen Verteilungsfunktionen der Gruppen A und B in ein gemeinsames Schaubild.

(2+2 Punkte)

Achtung: Ab sofort werden bei Blättern, die lose (bzw. nur mit gefalteten Ecken) abgegeben werden, sowie bei Blättern mit einem oder drei Namen, zwei Punkte abgezogen. Bitte Namen und slc-Login leserlich auf das Übungsblatt schreiben.