Dr. H. Lanzinger
M. Weyhmüller

Winter 2011
20.01.2012
Blatt 12

Übungen zu Stochastik für Wiwi

(Abgabe: Fr., 27.01.2012, vor den Übungen)

1. Du stellst fest, dass die Tabletts in der Mensa alle eine Nummer tragen und vermutest, dass sie von 1 bis zu einer unbekannten Zahl θ fortlaufend durchnummeriert sind. Während der nächsten Mensabesuche notierst Du Dir die Nummern $x_1, \ldots, x_n$ der von Dir verwendeten Tabletts.

   Betrachte $x_1, \ldots, x_n$ als Realisierung einer Zufallsstichprobe $X_1, \ldots, X_n$ einer diskreten Gleichverteilung auf der Menge $\{1; \ldots; \theta\}$.

   (a) Zeige, dass $\mathbb{E}(X_1) = \frac{\theta+1}{2}$ gilt und konstruiere mit der Momentenmethode einen Schätzer T_1 für θ.

   (b) Durch $T_2(x_1, \ldots, x_n) := \sqrt{12(\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2) + 1}$ ist ein weiterer Schätzer für θ gegeben, wobei $\hat{m}_r := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k^r$ wie in der Vorlesung definiert ist. Du hast Dir die Tablettnummern 1113, 1009, 1995, 925, 1238, 1339, 2395 und 980 notiert. Schätze θ jeweils mit T_1 und T_2 und diesen Nummern. Sind die Schätzungen plausibel?

   (2 + 2 Punkte)

2. $X_1, \ldots, X_n$ sei eine Zufallsstichprobe der diskreten Verteilung mit folgender Zähldichte

$$f_\theta(x) := \begin{cases} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{x^2}(1-\theta)^{1-x^2} & \text{falls } x \in \{-1; 0; 1\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Über den Parameter θ ist lediglich bekannt, dass er positiv und kleiner 1 ist.

   (a) Stelle sicher, dass es sich bei f_θ tatsächlich um eine Zähldichte handelt.

   (b) Zeige, dass die Ableitung der log-Likelihoodfunktion nach θ durch

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \log L(x_1, \ldots, x_n, \theta) = \frac{n}{\theta}\hat{m}_2 - \frac{n}{1-\theta}(1 - \hat{m}_2)$$

   gegeben ist und konstruiere einen Maximum-Likelihood-Schätzer für θ.

   Hinweis: Wie in der Vorlesung gelte $\hat{m}_2 := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k^2$ bzw. $\hat{m}_2 := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k^2$ für die Realisierung $(x_1, \ldots, x_n)$ einer Stichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$.

   (1 + 3 Punkte)

3. Sind folgende Schätzer erwartungstreu, asymptotisch erwartungstreu, oder weder noch? Begründe Deine Aussagen.

   (a) T_2^2 aus Aufgabe 1(b) für θ^2 (ebenfalls aus Aufgabe 1).

   (b) $T(x_1, \ldots, x_n) := \bar{x}$ für den Parameter λ einer Exponentialverteilung.

   (c) $T(x_1, \ldots, x_n) := 2$ falls $x_1 = 1$ und $T(x_1, \ldots, x_n) := 0$ sonst; für θ aus Aufgabe 2.

(d) $T(x_1, \dots, x_n) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^2$ für die Varianz einer Normalverteilung.

(1 + 1 + 1 + 1 Punkte)

4. Wirf zwei Münzen (mindestens) zwölfmal gleichzeitig und notiere 0, falls beide Münzen „Zahl“ zeigen und 1 sonst. Diese Notizen bilden die Stichprobe $x_1, \dots, x_{12}$ einer $\mathrm{Bin}(1, p)$-Verteilung mit $p \in (0, 1)$. Wir betrachten den Maximum-Likelihood-Schätzer $T_1(x_1, \dots, x_n) := \bar{x}$ aus der Vorlesung, sowie den Schätzer $T_2(x_1, \dots, x_n) := \frac{1}{n+2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + 1\right)$

   (a) Berechne nach jedem Wurf beide Schätzer mit der aktuell vorhandenen Stichprobe.

   (b) Liefern beide Schätzer immer plausible Ergebnisse? Sind sie erwartungstreu oder asymptotisch erwartungstreu oder weder noch?

(2 + 2 Punkte)

5. Wegen des Erfolgs von Automaten in Toiletten und der damit verbundenen kostenlosen medialen Präsenz der Uni Ulm in letzter Zeit, werden im Vorraum der Toiletten Spielautomaten – sogenannte „einarmige Banditen“ – installiert. Der zufällige Gewinn von X Euro bei jedem Spiel ist gemäß der Zähldichte

$$\mathrm{P}(X = x) := \begin{cases} p & \text{falls } x \in \{-1; 0\} \\ 1 - 2p & \text{falls } x = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

verteilt. Dabei ist $p \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Du spielst fünf Spiele und notierst die jeweiligen Gewinne. Das Ergebnis ist $(-1, 1, -1, 0, 1)$. Mit dieser Stichprobe versuchst Du herauszufinden wie X verteilt ist.

   (a) Wie würdest Du die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Ergebnisse bestimmen, wenn Du keine Information über die Form der Zähldichte hättest? Du weißt lediglich, dass $\mathrm{P}\big(X \in \{-1; 0; 1\}\big) = 1$ gilt.

   (b) Konstruiere einen Schätzer für p gemäß der Momentenmethode, berechne seinen Erwartungswert und schätze damit p aufgrund der vorliegenden Stichprobe.

   (c) Berechne $\mathrm{P}(X_1 = -1, X_2 = 1, X_3 = -1, X_4 = 0, X_5 = 1)$ (also die Wahrscheinlichkeit, dass die vorhandene Stichprobe auftritt) unter der Annahme, dass der Gewinn wie oben angegeben verteilt ist. Für welchen Wert von p wird diese Wahrscheinlichkeit maximal?

(1 + 2 + 1 Bonuspunkte)

Achtung: Ab sofort werden bei Blättern, die lose (bzw. nur mit gefalteten Ecken) abgegeben werden, sowie bei Blättern mit einem oder drei Namen, zwei Punkte abgezogen. Bitte Namen und slc-Login leserlich auf das Übungsblatt schreiben, sowie Vorder- und Rückseite der Blätter beschriften. Bei Aufgabe 5 handelt es sich um eine Bonusaufgabe, 50% der Punkte dieses Blattes entsprechen 8 Punkten.