

Die Modellierung des Reserverisikos in Internen Modellen von Schaden- und Unfallversicherern

Dorothea Diers

Preprint Series: 2007-17



**Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
UNIVERSITÄT ULM**

Stochastische Modellierung des Reserverisikos in der Kompositversicherung - Überblick und Fallstudie

Dorothea Diers

Inhaltsverzeichnis

1	EINLEITUNG	2
2	DER BEGRIFF DES RESERVERISIKOS IN DER ÖKONOMISCHEN SICHTWEISE	2
3	MODELLIERUNG DES RESERVERISIKOS AUF DER GRUNDLAGE VON MACKS MODELL.....	5
	3.1 Darstellung der Modellierung	5
	3.2 Fallstudie	7
4	MODELLIERUNG DES RESERVERISIKOS AUF DER GRUNDLAGE VON BOOTSTRAP-VERFAHREN	11
	4.1 Bootstrap-Verfahren.....	11
	4.2 ODP-Bootstrap	11
	4.3 Mack-Bootstrap	13
	4.4 Fallstudie	15
	4.5 Modellierung von Abhängigkeiten	24
5	LITERATUR.....	25

1 Einleitung

Der stochastischen Modellierung des Reserverisikos kommt im Rahmen von Internen Modellen und von Solvency II eine wichtige Bedeutung zu. Die Analyse des Reserverisikos wird damit zu einem wesentlichen Bestandteil des Risikomanagements. In diesem Übersichtsaufsatz wird das Reserverisiko in einer ökonomischen Sichtweise definiert, die als Risikosichtweise in Internen Modellen Verwendung finden kann und konsistent ist mit den Solvency II-Anforderungen. Dabei wird auf die wesentliche Unterscheidung des ultimativen Reserverisikos, d.h. des „mehrjährigen“ Reserverisikos bis zur vollständigen Schadenabwicklung, und des – für Solvency II relevanten – „einjährigen“ Reserverisikos eingegangen. Es werden beispielhaft einige in der Literatur bekannte Ansätze zur stochastischen simulationsbasierten Modellierung des ultimativen Reserverisikos dargestellt, die in Internen Modellen eingesetzt werden können. Die unterschiedlichen Modellierungsansätze werden anhand einer Fallstudie erläutert, die auf Beispieldaten der Sparten Kraftfahrt-Haftpflicht (KH) und der Feuersparte in der Verbundenen Gebäudeversicherung (VGW-Feuer) aufsetzt. So können die verschiedenen Methoden verglichen, deren unterschiedliche Charakteristika im Zusammenhang mit Sparten langer (KH) und kurzer (VGW-Feuer) Abwicklungsdauer analysiert und wichtige Ergebnisgrößen wie z.B. das benötigte Risikokapital berechnet werden.

2 Der Begriff des Reserverisikos in der ökonomischen Sichtweise

Das Reserverisiko ist das Risiko, das aus der Unsicherheit über die zukünftige Auszahlungshöhe (*Reservierungsrisiko*) und die zukünftigen Auszahlungszeitpunkte (*Auszahlungsrisiko*) der noch ausstehenden Zahlungen für bereits angefallene Schäden resultiert. Das Reserverisiko setzt sich demnach aus den Komponenten des Reservierungsrisikos und des Auszahlungsrisikos zusammen.

Dabei bezeichnet das *Reservierungsrisiko* die Abweichung des endgültigen Schadenaufwands vom geschätzten Erwartungswert, d.h. das Risiko, dass die Best Estimate Rückstellung nicht ausreicht, um sämtliche Verpflichtungen aus angefallenen Schäden zu erfüllen.

Das *Auszahlungsrisiko* beschreibt das Risiko, dass sich das Auszahlungsmuster der zukünftigen Zahlungen anders verhält als erwartet. Zur Modellierung des Auszahlungsrisikos sind demnach stochastische Abwicklungsmuster zu erzeugen, die als Mittelwert das Best Estimate Abwicklungsmuster besitzen. Da das Auszahlungsrisiko keinen Einfluss auf die absolute Höhe des Ultimates, sondern nur auf dessen Abwicklungsmuster hat, erhöht sich das für das Reservierungsrisiko in einer undiskontierten Betrachtungsweise zu stellende Risikokapital durch die zusätzliche Berücksichtigung des Auszahlungsrisikos nicht. Deshalb wird in der Praxis häufig nur das Reservierungsrisiko (ohne Berücksichtigung des Auszahlungsrisikos) modelliert (siehe Kapitel 3). Das Auszahlungsrisiko wird allerdings dann relevant, wenn die Abwicklungsmuster der Ultimates eine Rolle spielen. Dies ist z.B. der Fall, wenn Diskontierungseffekte einbezogen werden sollen oder wenn eine Berechnung des Reserverisikos für einzelne Kalenderjahre erfolgen soll. Diese beiden Aspekte werden zukünftig z.B. im Rahmen der Berechnungen des aufsichtsrechtlichen SCR (Solvency Capital Requirement) unter Solvency II relevant sein, weshalb das Auszahlungsrisiko nicht vernachlässigt werden sollte.

Wir wollen hier kurz auf den zweiten Punkt – die Berechnung auf Basis einzelner Kalenderjahre – eingehen, da er bei der einjährig abgegrenzten Kalenderjahressichtweise, die in mehrjährigen Modellen und im Rahmen von Solvency II relevant ist. Wie oben beschrieben, ist das ultimative Reserverisiko durch die Unsicherheit der zukünftigen Auszahlungen bis zur vollständigen Abwicklung gekennzeichnet und wird in der Abweichung vom Best Estimate gemessen. Diese Betrachtung basiert auf einer Endschadensicht (Ultimatesicht), die in Internen Modellen in der Regel eine wichtige Sichtweise darstellt.

In der Kalenderjahressicht ist eine Abgrenzung des Reserverisikos für die einzelnen Kalenderjahre erforderlich. Das Risiko besteht demnach in der Veränderung der Best Estimate Reserven vom Jahr t auf $t+1$. Der Zeitpunkt der Realisierung des Risikos lässt sich durch eine pfadweise Neubewertung der Rückstellungen auf der Basis der neu simulierten Diagonale bestimmen („actuary in the box“). Der Tatsache, dass in der einjährigen Sichtweise Abwicklungsrisiken, die sich erst in späteren Abwicklungsjahren realisieren, unterschätzt werden, kann durch den Einsatz mehrjähriger Modelle begegnet werden. Wir werden uns im Folgenden auf die Darstellung der Modellierung des ultimativen Reserverisikos beschränken.

Der Reservierungsprozess ist ein Prognoseprozess, bei dem die zukünftigen Schadenzahlungen basierend auf den aktuellen Daten (Beobachtungen) prognostiziert werden.

Hierbei entstehen verschiedene Fehlerquellen (Modellierungsfehler, der aus der Auswahl der Verfahren resultiert, Änderungsrisiko, Vorhersagefehler). Wir werden uns im Folgenden mit der Ermittlung des Vorhersagefehlers beschäftigen. In der klassischen Statistik wird der Vorhersagefehler als Schätzer für den „root mean square error“ betrachtet, während beim Bootstrap-Verfahren als analoges Maß die Standardabweichung der Vorhersageverteilung herangezogen wird.

Der Vorhersagefehler ist nicht immer einfach zu berechnen. Für einen einzelnen zukünftigen Schadenstand S_{ik} ist der „mean square error“ die erwartete quadratische Differenz zwischen der Beobachtung und der Prognose.

Wir unterstellen folgende Annahmen

1. $E[S_{ik}] = E[\hat{S}_{ik}]$ (erwartungstreu),
2. $E(S_{ik} - E[S_{ik}]) (\hat{S}_{ik} - E[\hat{S}_{ik}]) = 0$ (unkorreliert).

Dann gilt für die Vorhersagevarianz

$$\begin{aligned}
 & E[(S_{ik} - \hat{S}_{ik})^2] \\
 &= E(S_{ik} - \hat{S}_{ik})^2 = E(S_{ik} - E(S_{ik}) - \hat{S}_{ik} + E(\hat{S}_{ik}))^2 \\
 &= E(S_{ik} - E(S_{ik}) - \hat{S}_{ik} + E(\hat{S}_{ik}))^2 \\
 &= E(S_{ik} - E(S_{ik}))^2 + E(\hat{S}_{ik} - E(\hat{S}_{ik}))^2 - 2 E((S_{ik} - E(S_{ik})) (\hat{S}_{ik} - E(\hat{S}_{ik}))) \\
 &= E(S_{ik} - E(S_{ik}))^2 + E(\hat{S}_{ik} - E(\hat{S}_{ik}))^2
 \end{aligned}$$

= Prozessvarianz + Schätzvarianz,

und das mathematische Problem reduziert sich darauf, diese beiden Komponenten zu schätzen.

Hierbei beschreibt der Prozessfehler die Unsicherheit, die durch den eigentlichen Prozess, den das Modell beschreibt, entsteht („die Zukunft verhält sich anders als die Vergangenheit“). Der Schätzfehler hingegen beschreibt die Unsicherheit, die durch die Schätzung der Parameter für das Modell hervorgerufen wird.

Stochastische Reservierungsmethoden ermöglichen die Schätzung der Volatilität und modellieren darüber hinaus eine vollständige Verteilung für die Rückstellungen. Für die stochastische Modellierung der Rückstellungen können verschiedene Ansätze Anwendung finden. So kann die in [Mack 1993] dargestellte *Methode von Mack* herangezogen werden, auf deren Basis neben dem Best Estimate zunächst der mean squared error ermittelt wird. Mit Verteilungsannahmen und Momentenmethode kann dann eine Verteilung angepasst werden (parametrischer Ansatz, Abschnitt 3).

Des Weiteren können *Bootstrap-Verfahren* zur Quantifizierung des Reserverisikos Verwendung finden, bei denen vollständige Verteilungen der zukünftigen Cashflows erzeugt werden, so dass Reservierungs- und Auszahlungsrisiko berücksichtigt werden. Somit liegen die zukünftigen Cashflows je (altem) Anfalljahr pro Simulation vor. Genauer erhält man Verteilungen pro Anfalljahr und zukünftigem Abwicklungsjahr, die über Simulationsergebnisse definiert werden. Beim Bootstrapping handelt es sich um eine Simulationstechnik zur Bestimmung der Verteilung von Parameterschätzern. Ausgehend von beobachteten Daten werden in jeder Simulation mittels Ziehen mit Zurücklegen Pseudodaten erzeugt, so dass nach ausreichend vielen Simulationsschritten eine simulierte Verteilung der Parameter vorliegt. Für die Ermittlung des Reserverisikos ist der klassische Bootstrapping-Ansatz um einen weiteren Schritt (Verteilungsannahme) zur integrierten Modellierung des Prozessrisikos zu erweitern. Die Cashflows können dann z.B. mit Hilfe der Zinsstrukturkurve diskontiert werden. Durch Addition der zukünftigen diskontierten bzw. undiskontierten Zahlungen pro Simulation erhält man die simulierte Verteilung der diskontierten bzw. undiskontierten Rückstellungen. Somit sind z.B. die Berechnung des Best Estimates und des Reserverisikos auf der Basis diskontierter Schadenrückstellungen sowie die oben erwähnte Ermittlung des Reserverisikos für einzelne Kalenderjahre unmittelbar möglich. In den Abschnitten 4.2 und 4.3 wird das Bootstrap-Verfahren basierend auf zwei unterschiedlichen Modellen dargestellt.

Neben den genannten Methoden existiert eine Vielzahl weiterer Verfahren zur stochastischen Reservierung. Hier sind z.B. Regressionsmethoden (siehe z.B. [Christofides 1990]) und Bayes-Ansätze (siehe z.B. [England / Verral 2002] und [England / Verral 2006]) zu nennen. Welche Methoden zur Modellierung des Reserverisikos eingesetzt werden sollten bzw. stabilere Ergebnisse liefern, hängt auch von den zugrunde liegenden Schadendreiecken ab (z.B. Dreiecke mit vollständig oder nicht vollständig abgewickeltem ältestem Anfalljahr, irreguläre oder „glatte“ Dreiecke).

Das ultimative Reserverisiko ist aus der Verteilung des ökonomischen Abwicklungsergebnisses zu ermitteln, indem z.B. in Abhängigkeit eines vorgegebenen Sicherheitsniveaus die entsprechenden Perzentile der Verteilung herangezogen werden, mit Hilfe derer sich das zum vorgegebenen Sicherheitsniveau gehörige Risikokapital

ermitteln lässt. Das ultimative Reserverisiko stellt sich demnach als „mehrjähriges“ Reserverisiko in dem Sinne dar, dass das Risiko bis zur vollständigen Abwicklung berücksichtigt wird. In der Kalenderjahressicht wird das Risiko auf die einzelnen Kalenderjahre abgegrenzt, was für die Berechnung des „einjährigen“ Risikokapitals, z.B. im Zusammenhang mit der Erstellung Solvenzbilanzen, notwendig ist.

Wir bestimmen das ökonomische ultimative Abwicklungsergebnis als Abweichung des Endschadens vom Best Estimate.

3 Modellierung des Reserverisikos auf der Grundlage von Macks Modell

3.1 Darstellung der Modellierung

Macks Modell¹ ist ein rekursives, verteilungsfreies Modell, das folgende Annahmen trifft:

Es wird angenommen, dass Abwicklungsfaktoren $f_1, \dots, f_{I-1}$ existieren mit

$$E\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}} \mid C_{i1}, \dots, C_{ik}\right) = f_k, \quad 1 \leq i \leq I, \quad 1 \leq k \leq I-1, C_{ik} > 0,$$

wobei die C_{ik} kumulierte Schadenzahlungen sind. Weiter wird unterstellt, dass die Anfalljahre $\{C_{i1}, \dots, C_{iI}\}$, $1 \leq i \leq I$, global unabhängig sind. Die Modellparameter werden mittels

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}}$$

aus den bis jetzt vorliegenden Realisierungen der C_{ik} geschätzt. Die Rückstellungen $R_i = C_{iI} - C_{i,I+1-k}$ des Anfalljahres i werden durch

$$\hat{R}_i = C_{i,I+1-i} (\hat{f}_{I+1-i} \dots \hat{f}_{I-1} - 1), \quad 2 \leq i \leq I,$$

geschätzt.

Das Modell von Mack trifft die folgenden Annahmen für die ersten beiden Momente:

$$E(C_{i,k+1} \mid C_{i1} \dots C_{ik}) = E[C_{i,k+1} \mid C_{ik}] = C_{ik} f_k \quad \text{und}$$

$$\text{Var}(C_{i,k+1} \mid C_{i1} \dots C_{ik}) = \text{Var}[C_{i,k+1} \mid C_{ik}] = \sigma_k^2 \cdot C_{ik}, \quad 1 \leq i \leq I, \quad 1 \leq k \leq I-1, \quad C_{ik} > 0.$$

¹ Siehe im Folgenden [Mack 2002].

Der mittlere quadratische Fehler $mse(\hat{R}_i)$ (mean squared error) des Reserveschätzers $\hat{R}_i$ für das Anfalljahr i berechnet sich folgendermaßen, wobei der Berechnung folgende Aufspaltung in Prozess- und Schätzvarianz zugrunde liegt:

$$mse(\hat{R}_i) = mse(\hat{C}_{il}) = E((C_{il} - \hat{C}_{il})^2 | D_I) = \underbrace{\text{Var}(C_{il} | D_I)}_{\text{Prozessvarianz}} + \underbrace{[E(C_{il} | D_I) - \hat{C}_{il}]^2}_{\text{Schätzvarianz}},$$

mit der Menge der bisher beobachteten Daten $D_I = \{C_{ik} | i+k \leq I+1\}$, wobei $mse(\hat{R}_i)$ durch

$$(s.e.(\hat{R}_i))^2 = \hat{C}_{il}^2 \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{ik}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{jk}} \right)$$

geschätzt werden kann. Hierbei wird

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{I-k-1} \sum_{j=1}^{I-k} C_{jk} (g_{jk} - \hat{f}_k)^2, \quad 1 \leq k \leq I-2,$$

als Schätzer für σ_k^2 gewählt. Der mittlere quadratische Fehler $mse(\hat{R})$, $\hat{R} = \sum_{i=2}^I \hat{R}_i$, wird dann mittels

$$\sum_{i=2}^I \left\{ (s.e.(\hat{R}_i))^2 + \hat{C}_{il} \left(\sum_{j=i+1}^I \hat{C}_{jl} \right) \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{2\hat{\sigma}_k^2 / \hat{f}_k^2}{\sum_{v=1}^{I-k} C_{vk}} \right\}$$

geschätzt.² Das Modell von Mack liefert somit die ersten beiden Momente der Verteilung der Schadenrückstellungen.

Bei der hier dargestellten analytischen Formel von Mack wird davon ausgegangen, dass das zugrunde liegende Schadendreieck für das älteste Anfalljahr vollständig abgewickelt ist. Tails sind bei Anwendung des Mackschen Modells separat zu behandeln.

Das stochastische Modell von Mack mit der berechneten Best Estimate-Rückstellung und der analytischen Formel für die Standardabweichung des Prognosefehlers liefert nur die ersten beiden Momente der Verteilung der Schadenreserven, nicht aber die Verteilung selbst oder etwa eine Verteilung des Cashflows. In der Regel wird man daher mittels der Momentenmethode eine Verteilung (typischerweise Gamma oder Lognormal) anpassen und die zur Einschätzung des Reserverisikos benötigten Konfidenzniveaus und Quantile

² Diese Formel beinhaltet implizit eine Darstellung der Abhängigkeiten zwischen den Rückstellungen der einzelnen Anfalljahre.

in dem angepassten parametrischen Kontext ermitteln. Der stochastische Cashflow muss noch zusätzlich dazu ermittelt werden

Nach der separaten Modellierung des Reserverisikos für die einzelnen Anfalljahre kann das gemeinsame Reserverisiko für alle Anfalljahre z.B. durch Summation der Einzelwerte bestimmt werden. Bei gemeinsamer Modellierung des Reserverisikos für alle Anfalljahre ist allerdings eine Aufteilung auf die einzelnen Anfalljahre nicht einfach möglich. Somit ist die Frage der geeigneten Vorgehensweise zu klären. Allerdings werden bei der ersten Methode im Gegensatz zur zweiten Methode zwischen den Anfalljahren auftretende Diversifikationseffekte nicht abgebildet.

3.2 Fallstudie

In dieser Fallstudie beschränken wir uns auf die Betrachtung zweier Zahlungsdreiecke der Sparten VGV-Feuer und Kraftfahrt-Haftpflicht. Wir werden hier der übersichtlicheren Darstellbarkeit halber keine Diskontierung betrachten und keine Reservedreiecke, Schadenanzahldreiecke oder Volumenmaße (wie Beiträge oder Vertragsanzahlen) hinzuziehen. Auf dieser Basis werden wir das Reserverisiko zunächst – wie in 3.1 dargestellt – auf der Grundlage von Macks Modell modellieren.

Kumuliertes Zahlungsdreieck VGV-Feuer in Tsd. €											Best Estimate- Rückstellung in Tsd. €	Variations- koeffizient
Abwicklungsjahr												
Anfalljahr	1	1 - 2	1 - 3	1 - 4	1 - 5	1 - 6	1 - 7	1 - 8	1 - 9	1 - 10		
1997	10.855	15.305	15.705	15.900	15.909	15.912	15.914	15.915	15.916	15.917	0	11,09%
1998	10.673	13.830	14.203	14.300	14.320	14.324	14.326	14.327	14.328		1	11,09%
1999	13.156	18.087	18.812	18.834	18.849	18.852	18.853	18.854			2	6,67%
2000	11.775	17.992	18.842	18.893	18.907	18.911	18.912				4	6,66%
2001	10.285	16.300	16.802	16.929	16.939	16.941					5	19,03%
2002	11.126	16.772	17.000	17.054	17.056						8	17,65%
2003	12.391	17.856	18.571	18.673							22	36,37%
2004	12.331	18.358	18.885								124	59,02%
2005	10.183	14.922									580	32,76%
2006	11.637										5.940	18,42%
Gesamt											6.685	16,72%

Abwicklungsfaktoren									
Abwicklungsjahr									
Anfalljahr	1 - 2	2 - 3	3 - 4	4 - 5	5 - 6	6 - 7	7 - 8	8 - 9	9 - 10
1997	1,4099	1,0261	1,0124	1,0006	1,0002	1,0001	1,0001	1,0001	1,0001
1998	1,2958	1,0270	1,0068	1,0014	1,0003	1,0001	1,0001	1,0001	
1999	1,3748	1,0401	1,0011	1,0008	1,0002	1,0001	1,0001		
2000	1,5280	1,0472	1,0027	1,0007	1,0002	1,0001			
2001	1,5848	1,0308	1,0076	1,0006	1,0001				
2002	1,5074	1,0136	1,0032	1,0001					
2003	1,4411	1,0401	1,0055						
2004	1,4887	1,0287							
2005	1,4655								
2006									
Gewählt (Chain-Ladder-Faktoren)									
	1,4539	1,0321	1,0054	1,0007	1,0002	1,0001	1,0001	1,0001	1,0001

Abbildung 3: Zahlungsdreieck, Abwicklungsfaktoren, Best Estimate-Rückstellungen und Variationskoeffizienten der Sparte VGV-Feuer gemäß originalen Chain-Ladder-Faktoren

Kumuliertes Zahlungsdreieck KH in Tsd. €											Best Estimate- Rückstellung in Tsd. €	Variations- koeffizient
Abwicklungsjahr												
Anfalljahr	1	1 - 2	1 - 3	1 - 4	1 - 5	1 - 6	1 - 7	1 - 8	1 - 9	1 - 10		
1997	27.921	31.904	34.632	35.879	36.629	37.273	37.819	38.325	38.676	38.792	910	103,77%
1998	28.268	31.460	33.820	35.073	35.785	36.471	37.131	37.556	37.743		1.001	103,77%
1999	28.368	32.652	35.555	36.768	37.836	38.527	38.994	39.345			1.330	46,87%
2000	29.410	32.844	35.426	36.938	37.983	38.632	39.219				1.782	25,22%
2001	28.144	31.520	34.109	35.501	36.540	37.231					2.275	16,93%
2002	26.270	30.322	32.965	34.241	35.170						2.828	11,69%
2003	25.795	28.903	31.162	32.395							3.509	10,11%
2004	24.127	27.306	29.688								4.480	7,70%
2005	23.053	26.566									6.540	5,69%
2006	21.770										8.970	7,31%
Gesamt											33.625	8,54%

Abwicklungsfaktoren									
Abwicklungsjahr									
Anfalljahr	1 - 2	2 - 3	3 - 4	4 - 5	5 - 6	6 - 7	7 - 8	8 - 9	9 - 10
1997	1,1427	1,0855	1,0360	1,0209	1,0176	1,0147	1,0134	1,0092	1,0030
1998	1,1129	1,0750	1,0371	1,0203	1,0192	1,0181	1,0114	1,0050	
1999	1,1510	1,0889	1,0341	1,0291	1,0183	1,0121	1,0090		
2000	1,1167	1,0786	1,0427	1,0283	1,0171	1,0152			
2001	1,1199	1,0822	1,0408	1,0293	1,0189				
2002	1,1542	1,0872	1,0387	1,0271					
2003	1,1205	1,0781	1,0396						
2004	1,1318	1,0872							
2005	1,1524								
2006									
Gewählt (Chain-Ladder-Faktoren)									Tail
	1,1331	1,0828	1,0384	1,0259	1,0182	1,0150	1,0113	1,0071	1,0030
									1,0235

Abbildung 4: Zahlungsdreieck, Abwicklungsfaktoren, Best Estimate-Rückstellungen und Variationskoeffizienten der Sparte KH gemäß originalen Chain-Ladder-Faktoren zuzüglich eines Tails

Wir wählen in beiden Sparten zur Berechnung der Best Estimate-Rückstellungen die originalen Chain-Ladder-Faktoren, da die Daten keine Strukturbrüche und keine sonstigen wesentlichen Besonderheiten aufweisen. In KH ergänzen wir aufgrund der langen Abwicklungsdauer einen Tailfaktor von 1,0235, der anhand der Extrapolation der Chain-Ladder-Faktoren mittels Weibullkurve ermittelt und deren Parameter unter Anwendung der logarithmischen Regression gefittet wird, wobei k die Abwicklungsperiode und $r(k)$ den Abwicklungsfaktor bezeichne

$$r(k) = \frac{1}{1 - \exp(-ak^b)} \text{ mit } a = 2,02819 \text{ und } b = 0,43225.$$

Die Standardabweichungen bestimmen wir ebenfalls nach Macks Modell. Sie werden so ermittelt, dass die Variationskoeffizienten der Rückstellungen der einzelnen Anfalljahre mit Tailanpassung denen ohne Tailanpassung entsprechen.

Anfalljahr	inklusive Tail			ohne Tail		
	Best Estimate-Rückstellung in Tsd. €	Standard-abweichung in Tsd. €	Variations-koeffizient	Best Estimate-Rückstellung in Tsd. €	Standard-abweichung in Tsd. €	Variations-koeffizient
1997	910	944	104%	0	0	
1998	1.001	1.039	104%	113	117	104%
1999	1.330	623	47%	398	186	47%
2000	1.782	449	25%	842	212	25%
2001	2.275	385	17%	1.369	232	17%
2002	2.828	331	12%	1.957	229	12%
2003	3.509	355	10%	2.686	271	10%
2004	4.480	345	8%	3.696	285	8%
2005	6.540	372	6%	5.781	329	6%
2006	8.970	655	7%	8.265	604	7%
	33.625	2.872	8,54%	25.108	1.328	5,29%

Abbildung 5: (KH) Best Estimate-Rückstellungen, Standardabweichungen³ und Variationskoeffizienten gemäß Chain-Ladder-Methode mit und ohne Tail

³ Die hier angegebenen Gesamt-Standardabweichungen (letzte Zeile) berücksichtigen die Diversifikationseffekte zwischen den einzelnen Anfalljahren.

Ohne Berücksichtigung des Tails würde die Gesamtrückstellung in KH mit 25,1 Mio. € um 8,5 Mio. € niedriger liegen, so dass der Tail ca. 25% der Gesamtrückstellung beträgt (siehe Abbildung 5). Jetzt haben wir die ersten beiden Momente ermittelt, so dass wir gemäß dem in Abschnitt 3.1 beschriebenen Verfahren mittels Momentenfit eine Verteilung anpassen können. Wir verzichten auf den Vergleich verschiedener Verteilungen und wählen die Lognormalverteilung. Für die Modellierung der Verteilung der Rückstellungen können zwei Verfahren Anwendung finden. Zum einen können für die Rückstellungen der einzelnen Anfalljahre jeweils Lognormalverteilungen angepasst werden, zum anderen können die ersten beiden Momente für die Verteilung der Gesamtrückstellung ermittelt und daraus dann die entsprechenden Momente der Verteilungen der Rückstellungen der einzelnen Anfalljahre berechnet werden, so dass mittels Momentenfit die entsprechenden Verteilungen der Rückstellungen der einzelnen Anfalljahre angepasst werden können.⁴ Da im Falle der ersten Methode die Diversifikationseffekte zwischen den Anfalljahren nicht abgebildet werden, liegen die Rückstellungen in den hohen Perzentilen bei Anwendung der ersten Methode über denen der zweiten Methode. Die Abbildungen 6 und 7 stellen die Best Estimate-Rückstellungen und wichtige Perzentile der - nach den beiden Methoden ermittelten - Verteilungen der Rückstellungen der beiden Beispielsparten dar.

Lognormalverteilung der Rückstellungen der Sparte VGV-Feuer									
Anfalljahr	Best Estimate-Rückstellung	basierend auf der Verteilung der Rückstellungen der einzelnen Anfalljahre				basierend auf der Verteilung der Gesamtrückstellung			
		50th Percentile	75th Percentile	90th Percentile	95th Percentile	50th Percentile	75th Percentile	90th Percentile	95th Percentile
1997	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1998	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1999	2	2	3	3	3	2	3	3	3
2000	4	4	4	4	4	4	4	4	4
2001	5	5	5	6	6	5	5	6	6
2002	8	8	9	10	11	8	9	10	10
2003	22	20	26	32	36	21	25	30	33
2004	124	107	154	215	263	109	148	194	228
2005	580	552	684	831	933	559	667	781	858
2006	5.940	5.841	6.607	7.383	7.890	5.886	6.513	7.130	7.522
Summe	6.685	6.539	7.493	8.484	9.146	6.594	7.375	8.157	8.665

Abbildung 6: (VGV-Feuer) Best Estimate-Rückstellung und Perzentile der Rückstellungen

Lognormalverteilung der Rückstellungen der Sparte KH									
Anfalljahr	Best Estimate-Rückstellung	basierend auf der Verteilung der Rückstellungen der einzelnen Anfalljahre				basierend auf der Verteilung der Gesamtrückstellung			
		50th Percentile	75th Percentile	90th Percentile	95th Percentile	50th Percentile	75th Percentile	90th Percentile	95th Percentile
1997	910	632	1.124	1.889	2.578	726	1.009	1.325	1.543
1998	1.001	695	1.236	2.079	2.836	799	1.110	1.457	1.697
1999	1.330	1.204	1.627	2.132	2.507	1.295	1.538	1.772	1.919
2000	1.782	1.728	2.043	2.375	2.600	1.799	1.980	2.143	2.240
2001	2.275	2.243	2.512	2.782	2.958	2.305	2.459	2.595	2.674
2002	2.828	2.808	3.038	3.261	3.402	2.862	2.994	3.107	3.172
2003	3.509	3.492	3.737	3.973	4.121	3.549	3.690	3.810	3.879
2004	4.480	4.466	4.704	4.929	5.069	4.523	4.659	4.774	4.840
2005	6.540	6.530	6.785	7.023	7.170	6.591	6.736	6.859	6.929
2006	8.970	8.946	9.397	9.823	10.087	9.053	9.311	9.530	9.655
Summe	33.625	32.744	36.203	40.267	43.327	33.503	35.485	37.372	38.548

Abbildung 7: (KH) Best Estimate-Rückstellung und Perzentile der Rückstellungen

⁴ Die Standardabweichungen der Rückstellungen der einzelnen Anfalljahre werden aus der Gesamt-Standardabweichung ermittelt, indem die gleichen prozentualen Anteile von diesen an der Gesamt-Standardabweichung unterstellt werden wie im undiversifizierten Fall.

Wir entscheiden uns für die zweite Methode, da diese die Diversifikationseffekte zwischen den Anfalljahren berücksichtigt, und werden diese in den folgenden Abschnitten mit *Methode A* bezeichnen.

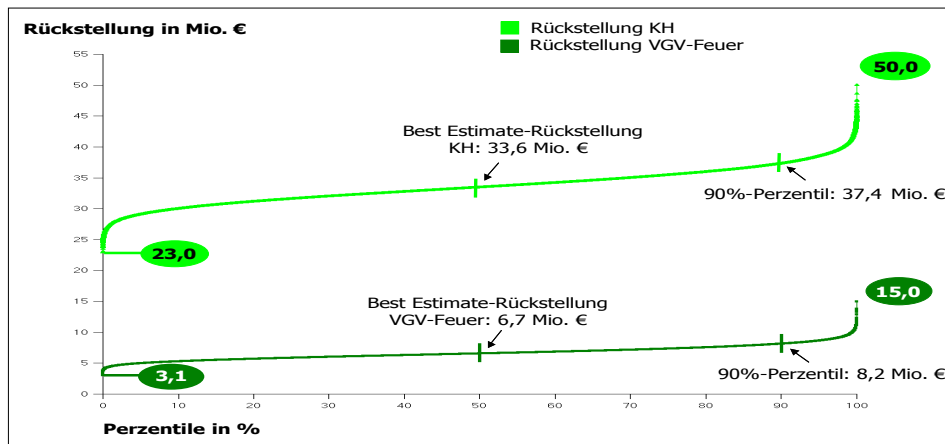


Abbildung 8: Perzentilgraph der Rückstellungen der Sparten KH und VGV-Feuer mit ausgewiesenem Minimum, Mittelwert (Best Estimate), 90%-Perzentil und Maximum

Abbildung 8 zeigt die Perzentilgraphen der gemäß Methode A ermittelten Rückstellungen der beiden Beispielsparten. Eine Perzentilfunktion ist im mathematischen Sinne die Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable, die allerdings für eine Vielzahl von Verteilungsfunktionen nicht definiert ist. In Simulationstools kann ein Perzentilgraph einfach erzeugt werden, indem die simulierten (z.B. 100.000) Werte der Größe nach sortiert angeordnet werden.

Um das benötigte Risikokapital für das ultimative Reserverisiko zu bestimmen, berechnen wir die Zufallsvariable des ökonomischen Abwicklungsergebnisses wie in Abschnitt 2 beschrieben. Das Management unseres Beispielunternehmens habe entschieden, das Risikokapital mit dem Risikomaß Tail-Value-at-Risk zum Sicherheitsniveau 99,8% (bzw. $\alpha = 0,002$) zu bestimmen. Dieses ermittelt sich bei 100.000 durchgeführten Simulationen als Mittelwert der 200 schlechtesten Szenarien.⁵ Mathematisch ist der Tail-Value-at-Risk $\text{TVaR}_\alpha(V)$ bzw. der Expected Shortfall einer Zufallsvariable des Verlustes V zum Sicherheitsniveau α definiert als bedingter Erwartungswert

$$\text{TVaR}_\alpha(V) = E[V \mid V \geq \text{VaR}_\alpha(V)], \alpha \in (0,1),$$

also der erwartete Verlust der 100 α % schlechtesten Fälle.⁶ Abbildung 9 zeigt die Perzentilgraphen der ökonomischen Abwicklungsergebnisse unserer Beispielsparten und das erforderliche Risikokapital für das ultimative Reserverisiko.

⁵ Zur Definition des Tail-Value-at-Risk, der Wahl des geeigneten Sicherheitsniveaus und der Anwendung des Tail-Value-at-Risk im Rahmen von Internen Modellen siehe auch [Diers 2007]. Im Rahmen dieser Abhandlung werden die Vor- und Nachteile einzelner Risikomaße nicht diskutiert. Siehe hierzu z.B. [Koryciarz 2004].

⁶ Hierbei bezeichne $\text{VaR}_\alpha(V)$ den Value-at-Risk der Zufallsvariable V zum Sicherheitsniveau α .

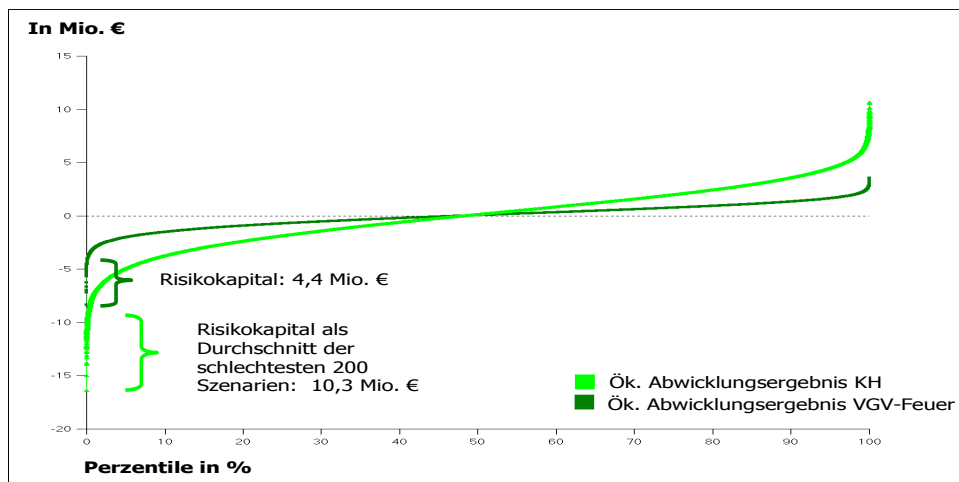


Abbildung 9: Perzentilgraph des ökonomischen Abwicklungsergebnisses der Sparten KH und VGV-Feuer mit ausgewiesenem Risikokapital nach dem TVaR zum Sicherheitsniveau 99,8%

4 Modellierung des Reserverisikos auf der Grundlage von Bootstrap-Verfahren

4.1 Bootstrap-Verfahren

Wie oben beschrieben liefert das stochastische Modell von Mack nur die ersten beiden Momente der Verteilung der Schadenrückstellung, nicht aber die Verteilung selbst oder etwa eine Verteilung des Cashflows. Diese werden aber für die Modellierung des Reserverisikos in einem Internen Modell benötigt. Eine Lösung bietet hier das Bootstrapverfahren, das auch auf das Mack Modell angewendet werden kann (siehe Abschnitt 4.2), das die Ermittlung von vollständigen Verteilungen der Cashflows der zukünftigen Zahlungen für bereits angefallene Schäden gewährleisten, so dass sowohl Reservierungs- als auch Auszahlungsrisiko berücksichtigt werden.

Im Allgemeinen handelt es sich beim Bootstrapping um eine Simulationstechnik zur Bestimmung der Verteilung von Parameterschätzern. Ausgehend von unabhängigen beobachteten Daten werden in jeder Simulation mittels Ziehen mit Zurücklegen Pseudodaten erzeugt, so dass nach ausreichend vielen Simulationsschritten eine simulierte Verteilung der Parameter vorliegt.

4.2 ODP-Bootstrap

Das Overdispersed Poisson-Modell (ODP-Modell) ist ein statistisches Modell, das mit Hilfe von Bootstrap Simulationstechniken eine Verteilung der Schadenrückstellungen und eine Verteilung der Cashflows liefert. Grundlage der folgenden Darstellungen sind die Ausführungen von England und Verrall.⁷

⁷ Zu den folgenden Darstellungen siehe [England / Verrall 1999].

Die Modellannahme ist, dass die Inkremente, S_{ik} , unabhängige und over-dispersed Poisson-verteilte Zufallsvariablen sind mit:

$$E(S_{ik}) = m_{ik} = x_i y_k, \quad \text{Var}(S_{ik}) = \Phi_k m_{ik} = \Phi_k x_i y_k, \quad (1)$$

$\sum_{k=1}^I y_k = 1$, $y_k \geq 0$, $\Phi_k \geq 1$. Die x_i entsprechen den erwarteten Ultimates für das Anfalljahr i , die y_k stellen die prozentuale Entwicklung der Ultimates während der Abwicklungsperiode k dar. Somit liefern die m_{ik} die inkrementellen (nach dem Abwicklungsmuster) erwarteten Einträge des zugrunde liegenden Dreiecks. Die „Overdispersion“ wird durch die Parameter Φ_k erzeugt, die für jede Abwicklungsperiode k aus den Beobachtungen zu schätzen sind.

Mittels der logarithmischen Linkfunktion

$$\eta_{ij} = \log m_{ik} = c + \alpha_i + \beta_k, \quad \alpha_l = \beta_l = 0. \quad (2)$$

wird die Parameterstruktur für den linearen Prediktor modelliert. Im Vergleich zum reinen Poisson-Modell wird hier demnach durch die – variabel für jede Abwicklungsperiode definierten – Skalenparameter Φ_k eine zusätzliche Streuung erzeugt. Mittels Maximum-Likelihood-Schätzungen können die Parameter c , α_i und β_k ermittelt werden, wobei die α_i als Zeilen- und die β_k als Spaltenparameter fungieren.

Die skalierten Pearson-Residuen sind definiert als

$$r_{ik}^{P,st} = \frac{S_{ik} - \hat{m}_{ik}}{\sqrt{\Phi_k \hat{m}_{ik}}} \text{ für } \hat{m}_{ik} \neq 0 \quad \text{und} \quad r_{ik}^{P,st} = 0 \text{ für } \hat{m}_{ik} = 0.$$

Statt der variierenden Skalenparameter Φ_k kann auch ein für alle Abwicklungsjahre einheitlicher Skalenparameter Φ definiert werden. Zur Schätzung der Skalenparameter sei auf [England / Verrall 2002] verwiesen.

Die so definierten Residuen können jetzt gebootstrapt werden. Hierdurch entsteht eine Vielzahl neuer Residuen-Dreiecke. Die Pseudodaten sind dann definiert als

$$S_{ik}^* = r_{ik}^* \sqrt{\Phi_k \hat{m}_{ik}} + \hat{m}_{ik},$$

und das Modell, das den Residuen zu Grunde liegt, kann für jedes Schadendreieck von Pseudodaten geschätzt werden.

Wenn der lineare Prädiktor angewandt wurde, der mit dem klassischen Chain-Ladder-Modell konsistent ist, können einige Vereinfachungen gemacht werden. Das Chain-Ladder-Modell kann bei jeder Iteration auf die Pseudodaten angewandt werden, um das Modell zu schätzen und Prognosewerte zu erhalten.

Werden alternative Prädiktor-Strukturen angewandt, z.B. solche mit einem Kalenderjahr-Trend oder parametrische Kurven, muss das Modell für die Pseudodaten mit geeigneter Software geschätzt werden.

Bootstrapping Prognosen S_{ik}^* , ohne Prozess-Fehler, können nun für das gesamte untere Schadendreieck berechnet werden, .h.

$$S_{ik}^* = \hat{m}_{ik} \quad \text{für } i = 2, \dots, I \text{ und } k = I+2-i, I+3-i, \dots, I.$$

Um schließlich den Prozess-Fehler hinzuzufügen, kann nun ein Prognosewert $\tilde{S}_{ik}$ von einer Over-dispersed Poissonverteilung mit Erwartungswert $\tilde{S}_{ik}$ und Varianz $\Phi_k \tilde{S}_{ik}$ simuliert werden. Dies kann auf verschiedene Arten umgesetzt werden, zum Beispiel approximativ mit Hilfe einer Gamma- oder (Log-)Normalverteilung.

Anschließend können wir die Prognosen der einzelnen Simulationen aggregieren, um eine Prognoseverteilung der ungezahlten Schäden zu erhalten.

Wenn das betrachtete Dreieck einen Tail besitzt, sind zusätzlich Annahmen über den Skalenparameter der Residuen im Tail zu treffen. Man kann hier den letzten Wert von Φ_k konstant lassen oder die Φ_k extrapolieren.

4.3 Mack-Bootstrap

Das Bootstrapverfahren kann auch auf das Mack Modell angewendet werden.⁸ In Bezug auf Macks Modell verwenden wir die in Abschnitt 3 eingeführten Bezeichnungen und Voraussetzungen. Unter der Annahme, dass die kumulierten $C_{i,k+1} \mid C_{ik}$ normalverteilt sind, zeigen England und Verrall,⁹ dass dieselben Schätzer für f_k und σ_k berechnet werden können, die auch in Macks klassischem Modell Anwendung finden.

Man erhält folgende äquivalente Darstellung mit Hilfe der beobachteten Faktoren F_{ik} erhält:

$$E[F_{ik} \mid C_{ik}] = f_k \quad \text{und} \quad \text{Var}[F_{ik} \mid C_{ik}] = \frac{\sigma_k^2}{C_{ik}}.$$

Zur vollständigen Spezifizierung des Modells als GLM benötigen wir noch eine Parameterstruktur für den erwarteten Abwicklungsfaktor f_k . Die folgende Struktur des linearen Prädiktors wäre zum Beispiel konsistent mit dem klassischen Chain-Ladder-Modell

$$\log(f_k) = \chi_k.$$

Im Allgemeinen besteht der erste Schritt zur Berechnung eines GLMs mit dem Bootstrapping-Ansatz darin, das statistische Modell zu definieren und zu schätzen. Falls wie beim Mack-Modell das GLM genau die klassischen Chain-Ladder-Schätzer liefert, ist dieser Schritt besonders einfach, weil man das Chain-Ladder-Modell nutzen kann, um die

⁸ Siehe im Folgenden [Mack 1994].

⁹ Siehe im Folgenden [England / Verrall 1999].

gefitteten Werte zu erhalten. In diesem Spezialfall kann man also auf Softwarepakete, die verallgemeinerte lineare Modelle verarbeiten können, verzichten.

Der zweite Bootstrapping-Schritt ist die Erzeugung von Pseudo-Datensätzen, basierend auf den Originaldaten. Die Grundannahme beim Bootstrapping ist, dass die Beobachtungen unabhängig und identisch verteilt sind. In unserem Fall können wir annehmen, dass die Daten zwar unabhängig, aber nicht identisch verteilt sind. Deshalb wenden wir das Bootstrapping-Verfahren auf die Residuen anstatt auf die eigentlichen Daten an, da wir annehmen können, dass die Residuen approximativ unabhängig und identisch verteilt sein. Die Definition der Residuen muss hierbei konsistent mit dem zugrunde liegenden statistischen Modell sein. Im Zusammenhang mit verallgemeinerten linearen Modellen können verschiedene Typen von Residuen angewandt werden. Das skalierte (oder „modifizierte“) Pearson Residuum ist zum Beispiel wie folgt definiert:

$$r_{ik} = r_{ik}^P = \frac{\sqrt{C_{ik}} (F_{ik} - \hat{f}_k)}{\hat{\sigma}_k}.$$

Die Residuen r_{ik} können (analog zur Beschreibung in Abschnitt 4.2) gebootstrapt werden. So erhalten wir z.B. 10.000 gesampelte Residuen¹⁰ r_{ik}^* , $1 \leq i \leq I-1$, $1 \leq k \leq I-i$.

Mit Hilfe der gesampelten Residuen können die Pseudo-Abwicklungsfaktoren F_{ik}^*

$$F_{ik}^* = \frac{r_{ik}^* \hat{\sigma}_k}{\sqrt{C_{ik}}} + \hat{f}_k$$

errechnet werden. Das Modell, das den Residuen zu Grunde liegt, kann an jedes Schadendreieck von Pseudodaten angepasst werden, um neue angepasste Abwicklungsfaktoren f_k^* zu erhalten.

Wenn der lineare Prädiktor angewandt wurde, der mit dem klassischen Chain-Ladder-Modell konsistent ist, können einige Vereinfachungen gemacht werden.

Werden alternative Prädiktor-Strukturen angewandt, z.B. solche mit einem Kalenderjahr-Trend oder parametrische Kurven, muss das Modell mit geeigneter Software geschätzt werden.

In unserem Modell soll zusätzlich das Prozessrisiko berücksichtigt werden. Unter der Annahme, dass die $C_{i,k+1} | C_{ik}$ einer Normalverteilung unterliegen,¹¹ kann die Prognose für jedes Bootstrap-Szenario wie folgt durchgeführt werden:

¹⁰ Mit gesampelten Residuen werden die durch Anwendung des Bootstrappings erzeugten Residuen bezeichnet.

¹¹ An dieser Stelle können auch andere Verteilungsannahmen gewählt werden.

- Für jedes Anfalljahr $1 < i \leq I$ ist das erste zukünftige $\tilde{C}_{i,I+2-i}$ unter der Annahme zu ermitteln, dass die $\tilde{C}_{i,I+2-i} \mid C_{i,I+1-i}$ einer Normalverteilung $Normal(\mu, \nu)$ mit den Parametern

$$\mu = f_{I+1-i}^* C_{i,I+1-i} \quad \text{und} \quad \nu^2 = \hat{\sigma}_{I+1-i}^2 C_{i,I+1-i}$$

folgen.

- Alle folgenden zukünftigen $\tilde{C}_{ik}$, $2 < i \leq I$, $I+2-i < k \leq I$, ermitteln sich rekursiv gemäß

$$\tilde{C}_{ik} \mid \tilde{C}_{i,k-1} \sim Normal(f_{k-1}^* \tilde{C}_{i,k-1}, \hat{\sigma}_{k-1}^2 \tilde{C}_{i,k-1}).$$

So erhalten wir eine Verteilung der Cashflows der zukünftigen Zahlungen für bereits angefallene Schäden.

Als grundlegende Unterschiede zum ODP-Bootstrap sind zu nennen:

- Es werden die Residuen der Abwicklungsfaktoren und nicht der Inkremente gebootstrappt.
- Das Modell ist rekursiv, der Prozessfehler muss sukzessive zugefügt werden.
- Das Verfahren ist auch im Falle negativer Inkremente anwendbar.

4.4 Fallstudie

Wir werden die Fallstudie des Abschnitts 3.2 fortsetzen, indem wir auf den dort dargestellten Zahlungsdreiecken für die Beispielsparten KH und VGV-Feuer aufsetzen. Dabei finden folgende drei Bootstrap-Methoden

- ODP-Bootstrap mit variierenden Skalenparameter SP (Abschnitt 4.2),
- ODP-Bootstrap mit konstantem Skalenparameter SP (Abschnitt 4.2),
- Mack-Bootstrap (Abschnitt 4.3)

im Zusammenhang mit unterschiedlichen Prozessverteilungen auf die zwei Beispielsparten und die in 3.2 definierten zugrunde liegenden Modelle (KH: Chain-Ladder-Verfahren angewandt auf Zahlungsdreieck unter Einbeziehung eines Tails, VGV-Feuer: Chain-Ladder-Verfahren angewandt auf Zahlungsdreieck ohne Einbeziehung eines Tails) Anwendung.

VGV-Feuer

Beginnen wir mit der Sparte VGV-Feuer. In Abbildung 10 sind Erwartungswerte, Standardabweichungen und Variationskoeffizienten bei Anwendung der drei Bootstrap-Methoden unter der Annahme verschiedener Prozessverteilungen dargestellt. Dabei liefert der Mack-Bootstrap mit Mackscher Bias-Korrektur unter Annahme der Normalverteilung

(ohne Berücksichtigung eines Tails) denselben Variationskoeffizienten wie das originale Chain-Ladder-Verfahren.

in Tsd. €		ODP Variierender SP	ODP Konstanter SP	Mack- Bootstrap	Zum Vergleich: Best Estimate / Variationskoeff. nach CL-Modell
Ohne Prozessfehler	Erwartete simulierte Rückstellung	6.690	6.690	6.689	6.685 / 16,7%
	Standardabweichung	471	474	372	
	Variationskoeffizient	7,0%	7,1%	5,6%	
Normalverteilung	Erwartete simulierte Rückstellung	6.688	6.690	6.685	
	Standardabweichung	975	744	1.116	
	Variationskoeffizient	14,6%	11,1%	16,7%	
Lognormalverteilung	Erwartete simulierte Rückstellung	6.682	6.685	6.674	Kumulierter Zahlungsstand 166.124
	Standardabweichung	980	740	1.120	
	Variationskoeffizient	14,7%	11,1%	16,8%	

Abbildung 10: Rückstellungen und Standardfehler der drei Bootstrap-Methoden mit verschiedenen Verteilungen für den Prozessfehler der Sparte VGV-Feuer

Die Standardabweichungen der Methoden ohne Prozessfehler (nur Parameterfehler) fallen natürlich geringer aus und sollen hier nur informatorisch dargestellt werden, um eine Einschätzung über die Größenordnung des Parameterfehlers zu geben. Da sich die Ergebnisse unter Verwendung der Normal- und der Lognormalverteilung nicht wesentlich unterscheiden, werden wir im Folgenden nur noch die Lognormalverteilung hinzuziehen. Um zu entscheiden, welche Bootstrap-Methode zur Quantifizierung des Reserverisikos Verwendung finden soll, analysieren wir zunächst die standardisierten Pearson-Residuen und Skalenparameter des ODP- und des Mack-Bootstrap.

Abbildung 11 zeigt die standardisierten Pearson-Residuen beim OPP-Bootstrap mit variierendem Skalenparameter. In den ersten vier Abwicklungsjahren ist eine deutliche Schwankung zu erkennen, die ab dem fünften Abwicklungsjahr stark nachlässt. Dabei ist im zweiten Abwicklungsjahr eine besonders starke Variabilität zu beobachten, die sicherlich genauer untersucht werden müsste. Die Skalenparameter streben gegen eins, was aus der relativ kurzen Abwicklungsdauer der Sparte VGV-Feuer resultiert.

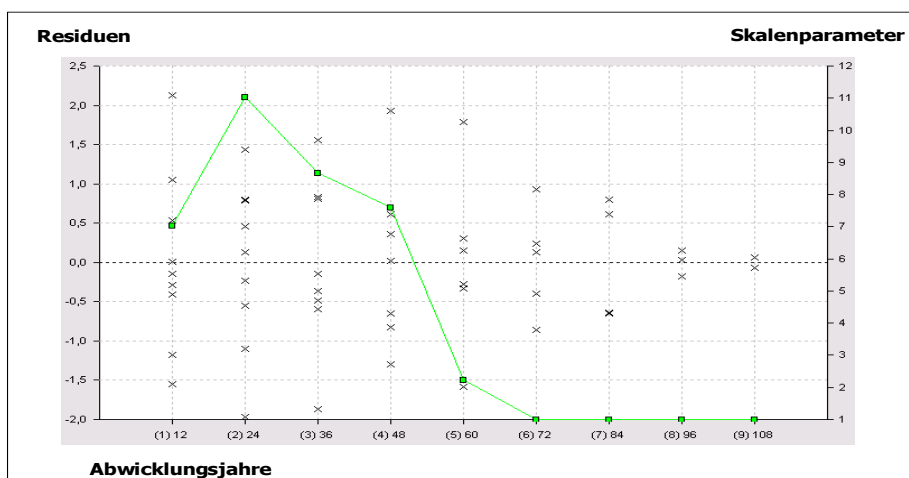


Abbildung 11: (VGV-Feuer) Standardisierte Pearson-Residuen und Skalenparameter beim ODP-Bootstrap mit variierendem Skalenparameter mit Lognormalverteilung als Prozessverteilung

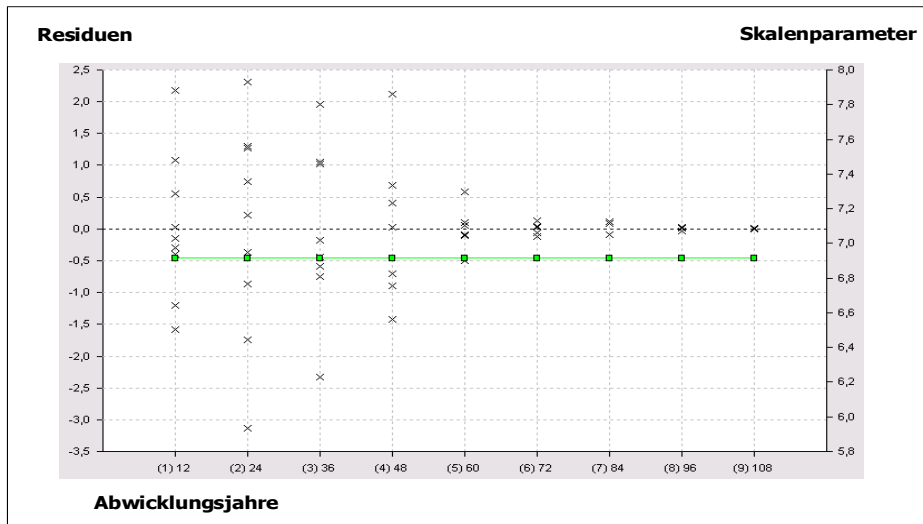


Abbildung 12: (VGV-Feuer) Standardisierte Pearson-Residuen und Skalenparameter beim ODP-Bootstrap mit konstantem Skalenparameter mit Lognormalverteilung als Prozessverteilung

Die Residuen schwanken sowohl bei der Wahl variierender als auch beim konstanten Skalenparameter (Abbildung 12) ziemlich gleichmäßig im Intervall $[-2, 2]$ um die Null, was ein Zeichen dafür ist, dass keine wesentlichen Störungen der Modelle vorliegen. Ein Vergleich des konstanten Skalenparameters von 6,9 mit den variierenden Skalenparametern zeigt, dass der konstante Skalenparameter die Variabilität ab dem 5. Abwicklungsjahr deutlich überschätzt, während die Variabilität in den ersten Abwicklungsjahren stark unterschätzt wird. Dies ist ein Indiz dafür, dass der ODP-Bootstrap mit konstantem Skalenparameter in diesem Fall nicht geeignet erscheint.

Beim Mack-Bootstrap (Abbildung 13) erkennen wir ebenfalls eine gleichmäßige Schwankung der Residuen im Intervall $[-2, 2]$. Die Skalenparameter streben aufgrund der kurzen Abwicklungsdauer ab dem dritten Abwicklungsjahr schnell gegen die Null.

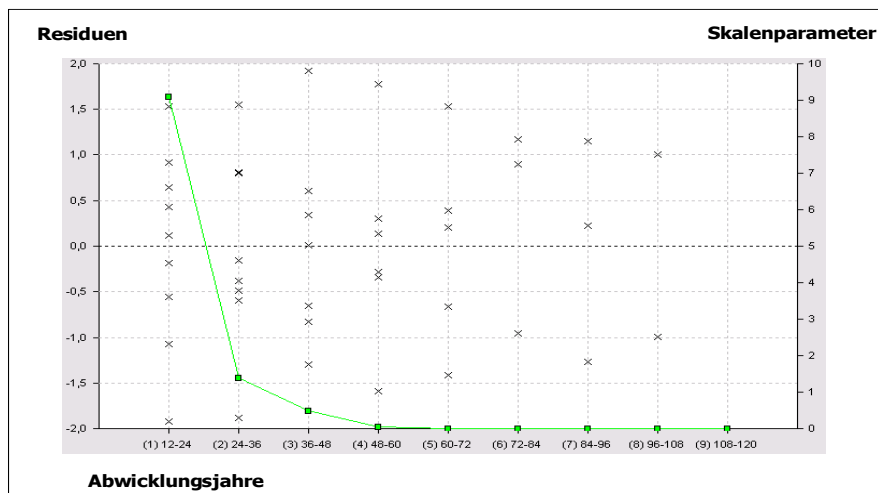


Abbildung 13: (VGV-Feuer) Standardisierte Pearson-Residuen und Skalenparameter beim Mack-Bootstrap mit Lognormalverteilung als Prozessverteilung

Bei allen Methoden liegt der Erwartungswert nahe am Best Estimate, allerdings ist die Schwankung beim ODP-Bootstrap mit konstantem Skalenparameter zu gering. Der ODP-Bootstrap mit variierendem Parameter und der Mack-Bootstrap scheinen in diesem

Beispiel beide für die Modellierung des Reserverisikos geeignet zu sein. Aufgrund der gleichmäßigen Entwicklung des Skalenparameters entscheiden wir uns für den Mack-Bootstrap. Wir werden allerdings alle vorgestellten Reservierungsmethoden weiterverfolgen.

Für die Best Estimate-Schätzung verlassen wir uns generell auf das zugrunde liegende Reservierungsmodell (hier: Chain-Ladder-Verfahren ohne Tail), das heißt wir schätzen mittels der Bootstrap-Methode keine neue Best Estimate-Rückstellung, sondern bestimmen ausgehend von der vorliegenden Best Estimate-Schätzung Verteilungen der zukünftigen Cashflows aus angefallenen Schäden. Zur Anpassung wählen wir die multiplikative Skalierung, da hier der Variationskoeffizient beibehalten wird (siehe Abschnitt 4.2). Aufgrund der geringen Abweichungen von der Best Estimate-Rückstellung ist eine solche Anpassung hier kaum notwendig.

Anfalljahr	Best Estimate-Rückstellung	Standardabweichung					
		ODP Konstanter SP		ODP Variierender SP		Mack-Bootstrap	
		in Tsd. €	Variationskoeffizient	in Tsd. €	Variationskoeffizient	in Tsd. €	Variationskoeffizient
1997	0	0	0%	0	0%	0	0%
1998	1	15	1740%	1	146%	0	11%
1999	2	25	962%	2	87%	0	7%
2000	4	28	754%	2	68%	0	7%
2001	5	28	652%	3	56%	1	19%
2002	8	33	417%	3	42%	1	18%
2003	22	47	216%	9	43%	8	36%
2004	124	89	72%	82	66%	73	59%
2005	580	181	31%	214	37%	190	33%
2006	5.940	695	12%	946	16%	1.095	18%
Gesamt	6.685	740	11%	980	15%	1.119	17%

Abbildung 14: (VGV-Feuer) Vergleich der Standardabweichungen der verschiedenen Methoden

Anfalljahr	Best Estimate-Rückstellung	ODP-Bootstrap Konstanter SP				ODP-Bootstrap Variierender SP				Mack-Bootstrap			
		Perzentile				Perzentile				Perzentile			
		50th	75th	90th	95th	50th	75th	90th	95th	50th	75th	90th	95th
1997	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1998	1	0	3	11	18	1	1	2	3	1	1	1	1
1999	2	2	9	22	33	2	3	5	6	2	3	3	3
2000	4	3	13	27	41	3	5	7	8	4	4	4	4
2001	5	4	14	30	43	4	6	8	10	5	5	6	6
2002	8	6	19	38	55	8	10	12	14	8	9	10	10
2003	22	16	36	65	92	20	26	33	39	22	27	32	35
2004	124	106	163	232	286	103	155	222	277	124	174	219	246
2005	580	558	686	820	912	547	695	864	981	578	706	824	894
2006	5.940	5.917	6.385	6.832	7.122	5.870	6.535	7.183	7.582	5.913	6.668	7.361	7.792
Gesamt	6.685	6.659	7.171	7.641	7.935	6.619	7.308	7.966	8.387	6.662	7.425	8.141	8.566

Abbildung 15: (VGV-Feuer) Vergleich der Perzentile der Rückstellungen der einzelnen Anfalljahre und der Gesamt-Rückstellungen unter verschiedenen Methoden

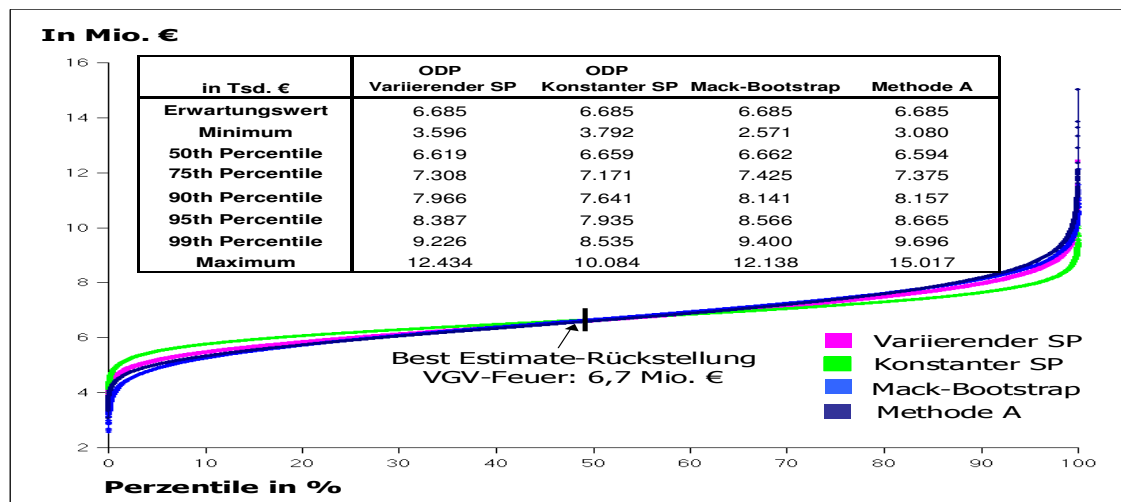


Abbildung 16: (VGV-Feuer) Vergleich der Perzentilgraphen der simulierten Rückstellungen nach Methode A und dem Mack-Bootstrap

Aufgrund der oben beschriebenen Eigenschaften des konstanten Skalenparameters, der bis zum vierten Abwicklungsjahr eine zu niedrige und ab dem fünften Abwicklungsjahr eine deutlich zu hohe Schwankung aufweist, liefert der ODP-Bootstrap mit konstantem Skalenparameter für die jüngeren Anfalljahre (2005, 2006) bei den höheren Perzentilen geringere Gesamt-Rückstellungen als die anderen beiden Bootstrap-Methoden und für die alten Anfalljahre (1997 bis 2004) in den höheren Perzentilen höhere Rückstellungen (Abbildungen 14 und 15). In der Abbildung 16 wurden informatorisch auch das Minimum und das Maximum angegeben. Diese Werte hängen jedoch stark von der Anzahl der zugrunde liegenden Simulationen ab und können stark schwanken. Deshalb sollte ein verstärktes Augenmerk auf die angegebenen Perzentile, die bei 100.000 Simulationen sehr stabil sind, und nicht auf die Extremwerte, gelegt werden.

Jetzt kann das benötigte ultimative Risikokapital für die Sparte VGV-Feuer gemäß der in Abschnitt 3.2 beschriebenen Vorgehensweise ermittelt werden. Dort haben wir das Risikokapital nach dem Tail-Value-at-Risk zum Sicherheitsniveau 99,8% für Methode A bereits mit 4,4 Mio. € quantifiziert. Bei Anwendung des ODP-Bootstrap mit konstantem Skalenparameter ergibt sich erwartungsgemäß mit 2,6 Mio. € der niedrigste Risikokapitalbedarf (siehe Abbildung 17). Die Risikokapitalien beim favorisierten Mack-Bootstrap und beim ODP-Bootstrap liegen mit 3,8 Mio. € (Mack) und 3,7 Mio. € (ODP variierender SP) sehr nahe beieinander.¹²

¹² Die angegebenen Risikokapitalien sind bei den durchgeführten 100.000 Simulationen sehr stabil.

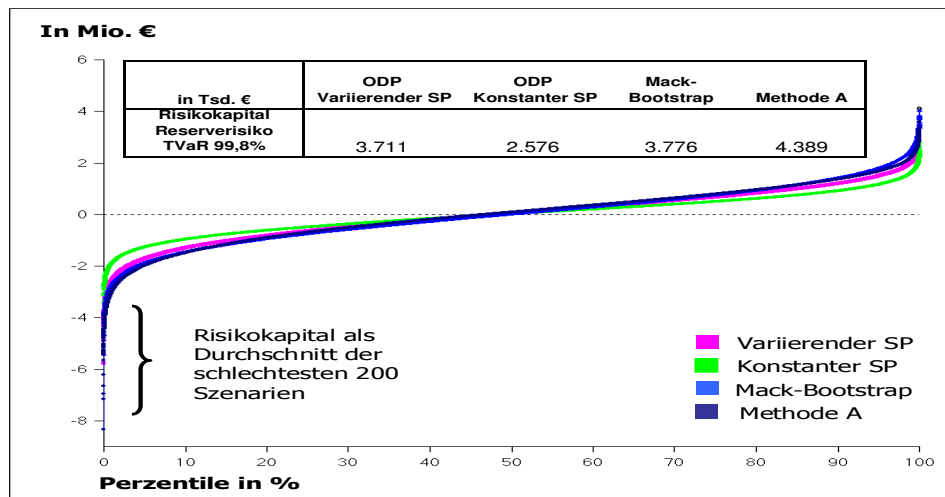


Abbildung 17: (VGV-Feuer) Vergleich der Perzentilgraphen der ökonomischen Abwicklungsergebnisse bei Anwendung des Mack-Bootstrap und Methode A

Kraftfahrt-Haftpflicht

Analog zur Vorgehensweise bei der Sparte VGV-Feuer sollen die drei Bootstrap-Methoden für die Sparte KH verglichen werden. Wir haben im zugrunde liegenden Chain-Ladder-Modell bei der Sparte KH einen Tail berücksichtigt. Dazu wurde eine Weibullkurve angepasst (siehe Abschnitt 3.2). In unserem Modell haben wir den so berechneten Tail zugrunde gelegt und in jeder Simulation die gewählte Prozessverteilung (hier Lognormal) auf jedes Tail-Inkrement angewandt. Im Falle des konstanten Skalenparameters, wurde dieser verwendet, im Falle eines variierenden Skalenparameters wurde der Durchschnitt der Skalenparameter der letzten drei Abwicklungsperioden gewählt.

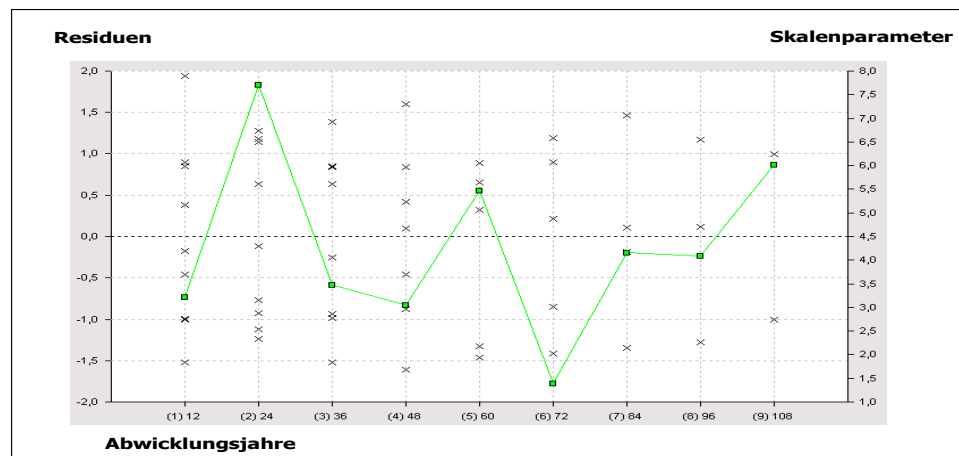


Abbildung 18: (KH) Standardisierte Pearson-Residuen und Skalenparameter beim ODP-Bootstrap mit variierendem Skalenparameter und Lognormalverteilung als Prozessverteilung

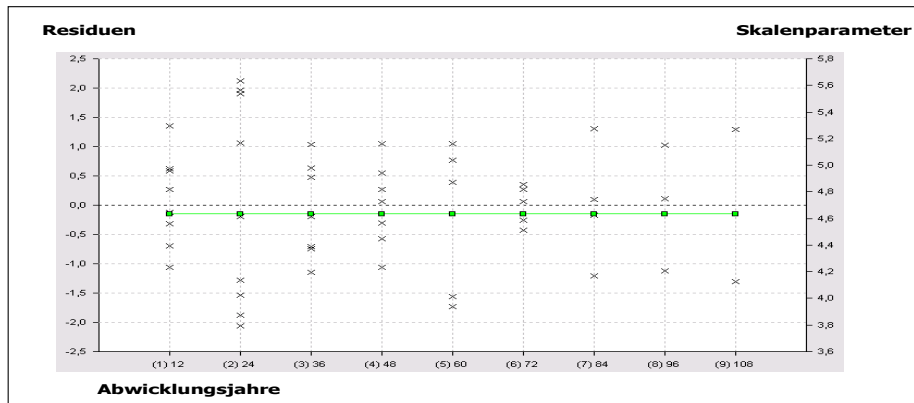


Abbildung 19: (KH) Standardisierte Pearson-Residuen und Skalenparameter beim ODP-Bootstrap mit konstantem Skalenparameter und Lognormalverteilung als Prozessverteilung

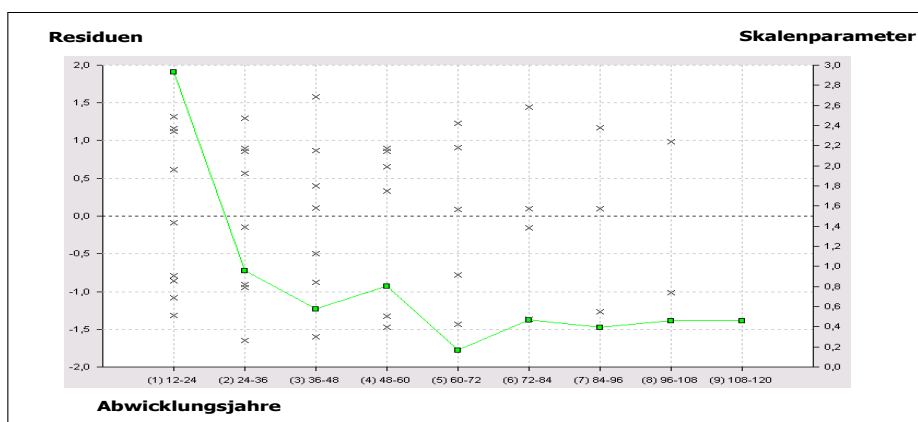


Abbildung 20: (KH) Standardisierte Pearson-Residuen und Skalenparameter beim Mack-Bootstrap und Lognormalverteilung als Prozessverteilung

Bei allen drei Methoden schwanken die Residuen relativ gleichmäßig im Intervall $[-2, 2]$ um die Null. Die variierenden Skalenparameter sind sehr volatil. Eine systematische Annäherung an die Null (ODP) bzw. die Eins (Mack) findet aufgrund der langen Abwicklungsdauer nicht statt. Beim ODP-Bootstrap mit variierendem Skalenparameter bleibt ggf. zu klären, woher die auffallend geringe Schwankung im 6. Abwicklungsjahr resultiert. Abbildung 19 weist einen konstanten Skalenparameter von 4,6 aus, der etwa in der Größenordnung des durchschnittlichen variierenden Skalenparameters des ODP-Bootstraps liegt, weshalb die Ergebnisse beider Methoden sehr ähnlich sind. Beim Mack-Bootstrap ist eine deutliche Minderung der Schwankung vor allem ab dem 5. Abwicklungsjahr zu erkennen, die sicherlich realistisch ist.

Ein Vergleich der Variationskoeffizienten weist bei Anwendung des Mack-Bootstrap den höchsten Variationskoeffizienten aus (siehe Abbildung 21). Die Variationskoeffizienten der beiden ODP-Bootstraps liegen unter dem der Methode A, wobei die Verwendung variierender (anstatt des konstanten) Skalenparameter zu einer leichten Senkung des Variationskoeffizienten führt (von 8,2% auf 7,8%).

in Tsd. €	Erwartete simulierte Rückstellung vor Skalierung	Erwartete simulierte Rückstellung nach mult. Skalierung	Skalierte Standard- abweichung	Variations- koeffizient
ODP Variierender SP	33.447	33.625	2.634	7,8%
ODP Konstanter SP	33.398	33.625	2.756	8,2%
Mack-Bootstrap	34.357	33.625	3.521	10,5%
Methode A	33.625	33.625	2.872	8,5%

Abbildung 21: (KH) Rückstellungen und Standardabweichungen bei Anwendung der verschiedenen Bootstrap-Methoden mit der Lognormalverteilung als Prozessverteilung

Um den Einfluss der Tailanpassung auf die Schwankung der Ergebnisse zu bewerten, vergleichen wir die Variationskoeffizienten vor und nach Tail-Anpassung. Hier zeigt sich bei allen Methoden ein deutlicher Anstieg des Prognosefehlers unter Berücksichtigung des Tails (ODP Variierender SP: 4,48% auf 7,8%, ODP Konstanter SP: 4,73% auf 8,2%, Mack-Bootstrap: von 6,14% auf 10,5%, Methode A: 5,3% auf 8,5%).

Da beim ODP-Bootstrap mit variierendem Skalenparameter in diesem Beispiel der niedrigste Variationskoeffizient ausgewiesen wird und das Modell darüber hinaus keine erkennbaren Störungen aufweist, favorisieren wir für unsere KH-Sparte diese Reservierungsmethode.

Im Folgenden skalieren wir die Erwartungswerte der simulierten Rückstellungen multiplikativ – also unter Beibehaltung der Variationskoeffizienten – auf die Best Estimates des zugrunde liegenden Reservierungsmodells. Abbildung 22 gibt ergänzend eine Übersicht über die Variationskoeffizienten der einzelnen Anfalljahre unserer favorisierten ODP-Bootstrap-Methode mit variierendem Skalenparameter im Vergleich zu der Methode A.

Anfalljahr	Best Estimate- Rückstellung	Methode A		ODP-Bootstrap Variier. SP	
		Standard- abweichung	Variations- koeffizient	Standard- abweichung	Variations- koeffizient
1997	910	944	104%	220	24%
1998	1.001	1.039	104%	249	25%
1999	1.330	623	47%	314	24%
2000	1.782	449	25%	337	19%
2001	2.275	385	17%	354	16%
2002	2.828	331	12%	349	12%
2003	3.509	355	10%	385	11%
2004	4.480	345	8%	391	9%
2005	6.540	372	6%	437	7%
2006	8.970	655	7%	610	7%
Gesamt	33.625	2.872	9%	2.620	8%

Abbildung 22: (KH) Best Estimate-Rückstellung (im Falle des ODP-Bootstrap multiplikativ skaliert), Standardabweichung und Variationskoeffizient für die einzelnen Anfalljahre

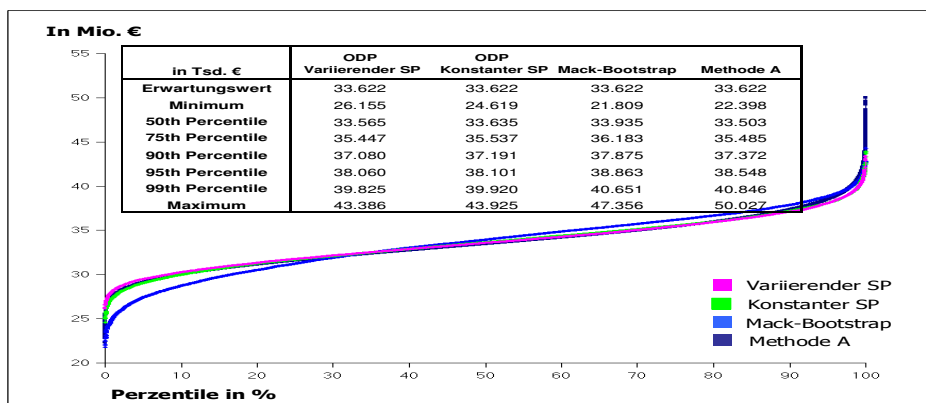


Abbildung 23: (KH) Perzentilgraphen der Rückstellungen bei Anwendung der verschiedenen Bootstrap-Methoden mit der Lognormalverteilung als Prozessverteilung

Aus Abbildung 23 ist ersichtlich, dass die nach unserem präferierten ODP-Bootstrap mit variierendem Skalenparameter ermittelte Rückstellung mit einer Wahrscheinlichkeit von 25% um 1,8 Mio. € (35.447 Tsd. € - 33.622 Tsd. €) höher ausfällt als die Best Estimate-Rückstellung. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 1% liegt sie sogar um 6,2 Mio. € (39.825 Tsd. € - 33.622 Tsd. €) höher.

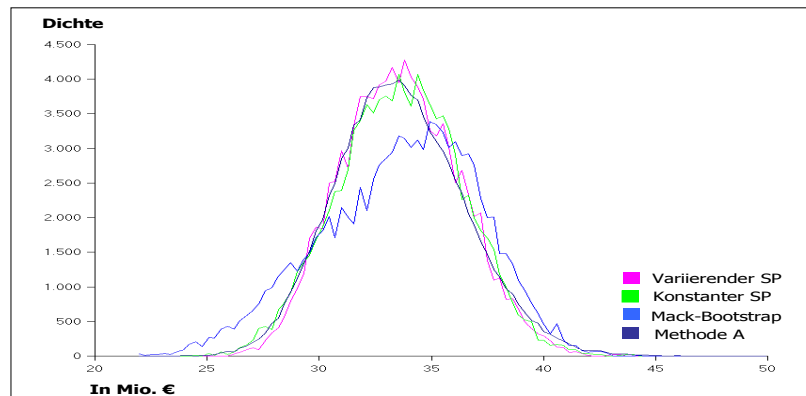


Abbildung 24: (KH) Simulierte Dichte (Häufigkeitsverteilung) der Rückstellungen bei Anwendung der verschiedenen Bootstrap-Methoden mit der Lognormalverteilung als Prozessverteilung

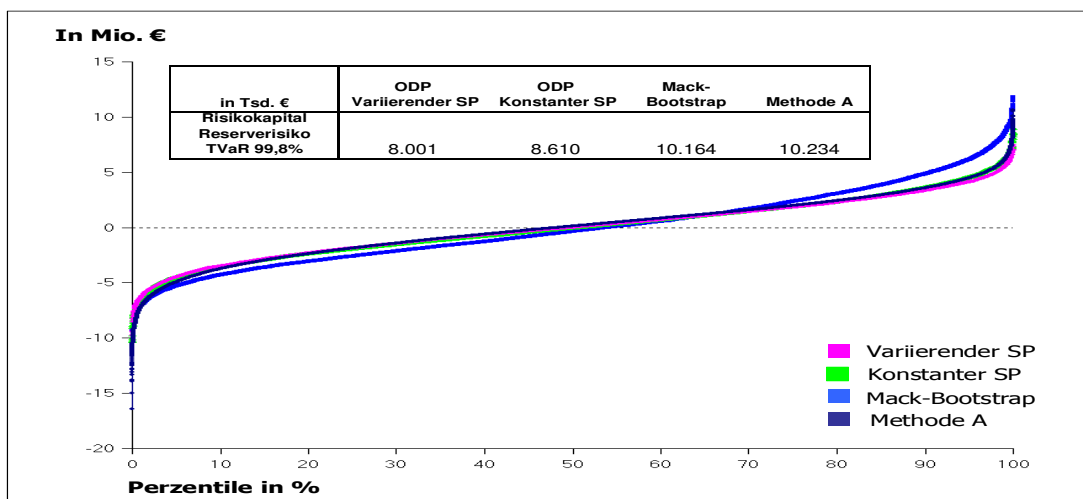


Abbildung 25: (KH) Perzentilgraphen der ökonomischen Abwicklungsergebnisse bei Anwendung der verschiedenen Bootstrap-Methoden mit der Lognormalverteilung als Prozessverteilung und Risikokapital

Der Vergleich der Perzentilgraphen in Abbildung 23 bzw. der Häufigkeitsverteilungen in Abbildung 24 zeigt, dass die vier Reservierungsmethoden im Bereich der höheren Perzentile aufgrund der relativ glatten Daten nur leicht unterschiedliche Ergebnisse aufweisen. So schwankt z.B. das 99%-Perzentil bei den vier Methoden zwischen 39,8 Mio. € und 40,8 Mio. €. Ebenso wie bei der Sparte VGV-Feuer fällt auch hier das nach Methode A ermittelte Risikokapital mit 10,2 Mio. € am höchsten aus (siehe Abbildung 29).

Abbildung 26 zeigt 100.000 simulierte Pfade möglicher zukünftiger (kumulierter) Auszahlungen der KH-Schäden der jüngsten Anfalljahre 2006 und 2005, die mittels ODP-Bootstrap und variierendem Skalenparameter erzeugt wurden. In der rechten Abbildung sind die Zahlungen der Abwicklungsjahre 1 und 2 mit 23,1 Mio. € (2005) und 26,6 Mio. € (2005-2006) bereits bekannt und deshalb deterministisch (siehe hierzu auch Abbildung 4). Aus dieser Modellierung ergibt sich für die Rückstellungen des

Anfalljahres 2005 ein Variationskoeffizient von knapp 7% (siehe Abbildung 22). In der linken Abbildung ist nur die Zahlung des ersten Abwicklungsjahres mit 21,8 Mio. € (2006) bekannt und deshalb deterministisch. Für die Rückstellungen des Anfalljahres 2006 ergibt sich ein Variationskoeffizient von ebenfalls knapp 7% (siehe Abbildung 22).

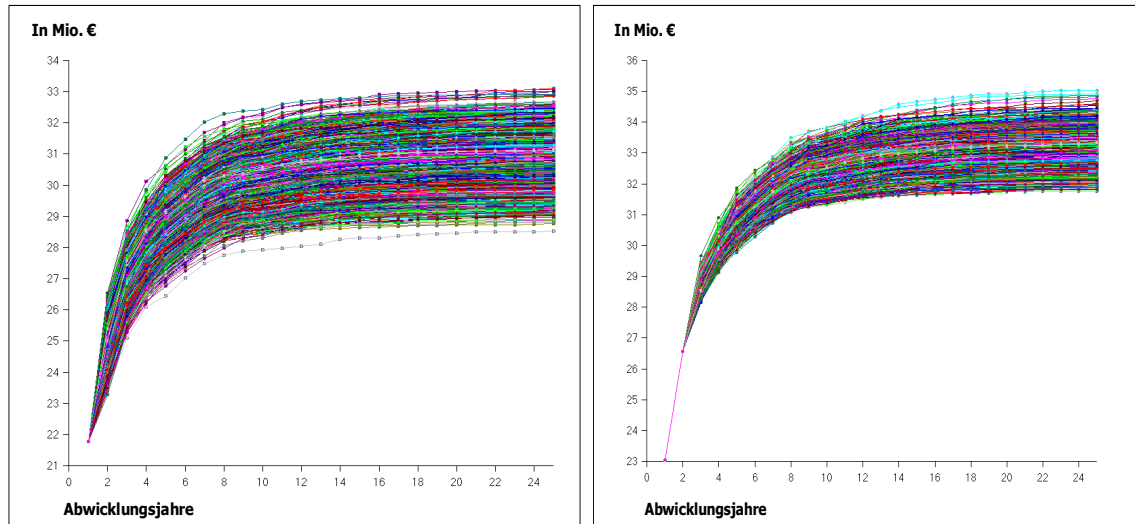


Abbildung 26: (KH) Simulierte kumulierte Auszahlungen der Anfalljahre 2006 (links) und 2005 (rechts)

4.5 Modellierung von Abhängigkeiten

Zum Abschluss unserer Fallstudie wollen wir die Verteilung der Rückstellungen und das für das ultimative Reserverisiko zu stellende Risikokapital des Gesamtunternehmens ermitteln, das aus den beiden beschriebenen Sparten VGV-Feuer und KH besteht. Hierbei sind geeignete Abhängigkeiten zwischen den ökonomischen Abwicklungsergebnissen der Sparten zu unterstellen. Abbildung 27 stellt einen Vergleich des Risikokapitalbedarfs (TVaR 99,8%) für das Reserverisiko des Gesamtunternehmens unter verschiedenen Abhängigkeiten dar. Beim Anstieg der linearen Abhängigkeit von 0% auf 20% steigt der Risikokapitalbedarf von 8,9 Mio. € auf 9,6 Mio. € an.¹³ Des Weiteren wurde eine verstärkte Tail-Abhängigkeit mittels einer Gumbel-Copula unterstellt, die in unserem Beispiel etwa einer linearen Korrelation von 20% entspricht. Aufgrund der verstärkten Tail-Abhängigkeit ist ein weiterer Anstieg des Risikokapitalbedarfs von 9,6 Mio. € auf 10,7 Mio. € zu verzeichnen. Dieses Beispiel zeigt, dass bei der Wahl der Abhängigkeiten somit nicht nur die geeignete Höhe sondern auch die geeignete Struktur berücksichtigt werden sollte, da hierdurch die Höhe des Risikokapitalbedarfs stark beeinflusst werden kann.¹⁴

¹³ Die lineare Korrelation von 20% ist hier sicherlich sehr hoch angesetzt. Zwischen den Sparten VGV-Feuer und KH kann in der Regel nahezu die Unabhängigkeit unterstellt werden. In QIS 3 wurde eine (sehr hohe) Korrelation von 25% vorgegeben.

¹⁴ Hintergründe und Beispiele hierzu sind in [Diers 2007] dargestellt.

Risikokapitalbedarf unter verschiedenen Abhängigkeiten			
in Tsd. €	0 % Korrelation	20 % Korrelation	Gumble (entspricht 20% Korrelation)
VGW-Feuer	3.776	3.776	3.776
KH	8.001	8.001	8.001
Summe	11.777	11.777	11.777
Diversifikationseffekt	2.911	2.215	1.098
Gesamt (diversifiziert)	8.866	9.562	10.679

Abbildung 27: Risikokapitalbedarf zum *TVaR* mit Sicherheitsniveau von 99,8% unter verschiedenen Abhängigkeitsstrukturen

5 Literatur

- [Ajne 1994] Ajne, B. (1994): Additivity of Chain-Ladder Projections, *ASTIN Bulletin* 24, S. 311-318
- [Braun 2004] Braun, C. (2004): The Prediction Error of the Chain Ladder Method Applied to Correlated Run-Off Triangles; *ASTIN Bulletin*, Vol. 34, No. 2, S. 399-423
- [Diers 2007] Diers, D. (2007): Interne Unternehmensmodelle in der Schaden- und Unfallversicherung – Entwicklung eines stochastischen internen Modells für die wert- und risikoorientierte Unternehmenssteuerung und für die Anwendung im Rahmen von Solvency II, ifa-Verlag (www.ifa-ulm.de)
- [England 2002] England, P. (2002): Addendum to "Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving"; *Insurance: Mathematics and Economics*, Volume 31, No. 3, S. 461-466
- [England / Verrall 1999] England, P.; Verrall, R. (1999): Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving; *Insurance: Mathematics and Economics* 25, S. 281-293
- [England / Verrall 2002] England, P.; Verrall, R. (2002): Stochastic Claims Reserving in General Insurance; *British Actuarial Journal* 8, III, S. 443-544
- [England / Verrall 2006] England, P.D. Verrall, R.J. (2006): Predictive Distributions of Outstanding Liabilities in General Insurance, submitted to "Annals of Actuarial Science"
- [Faculty and Institute of Actuaries 1989] Faculty and Institute of Actuaries (1989): Claims Reserving Manual, Volume 1 & Volume 2
- [GDV 2006] GDV (2006c): Portefeuillebewertung von Schadenreserven am Beispiel der Kraftfahrzeug-Haftpflichtversicherung, Berlin
- [Institute of Actuaries 2002] Institute of Actuaries (2002): Claims Reserving Working Party Paper, Graham Lyons, Chairman
- [Klemmt 2005] Klemmt, H.-J. (2005): Separierung von Abwicklungsdreiecken nach Basis- und Großschäden; *Blätter der DGVFM*, Band XXVII, Heft 1, April 2005
- [Koryciorz 2004] Koryciorz, S. (2004): Sicherheitskapitalbestimmung und -allokation in der Schadenversicherung: Eine risikotheorietische Analyse auf der Basis des Value-at-Risk und des Conditional Value-at-Risk; Veröffentlichungen des Instituts für Versicherungswissenschaft der Universität Mannheim, Bd. 67, VVW, Karlsruhe

-
- [Kremer 2005] Kremer, E. (2005): The correlated chain-ladder method for reserving in case of correlated claims developments; Blätter der DGVFM, Band XXVII, Heft 2, Oktober 2005
- [Mack 1993] Mack, T. (1993): Distribution-Free Calculation of the Standard Error of Chain Ladder Reserve Estimates, ASTIN Bulletin, 23:2, p.213-225
- [Mack 1994] Mack, T. (1994): Measuring the Variability of Chain Ladder Reserve Estimates, CAS
- [Mack 1995] Mack, T. (1995): Which Stochastic Model is Underlying the Chain Ladder Method?, CAS Forum, Spring vol.1, p.101-182
- [Mack 1999] Mack, T. (1999): Standard Error of Chain Ladder Reserve Estimates: Recursive Calculation and Inclusion of a Tail Factor, ASTIN Bulletin, 29:2, p.361-6
- [Mack 2002] Mack, T. (2002): Schadenversicherungsmathematik; Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik, DGVM, VVW Karlsruhe, Heft 28, 2. Auflage
- [Mack / Venter 2000] Mack, T. and Venter, G. (2000): A Comparison of Stochastic Models that reproduce Chain Ladder Reserve Estimates, Insurance: Mathematics and Economics, 26, no.: 1, 101-107
- [Mack / Venter 2000] Mack, T.; Venter, G. (2000): A Comparison of Stochastic Models that Reproduce Chain Ladder Reserve Estimates, Insurance: Mathematics and Economics 26, No. 1, S. 101-107
- [McCullagh / Nelder 1989] McCullagh, P.; Nelder, J.A. (1989): Generalized Linear Models, Monographs on Statistics and Applied Probability 37, Chapman & Hall, London, Second Edition
- [McLennan / Murphy 2006] McLennan, A.; Murphy, K. (2006): A Method for Projecting Individual Large Claims; Casualty Loss Reserving Seminar, Atlanta, 11.-12. September 2006, [<http://www.casact.org/education/clrs/2006/handouts/murphy.ppt>]
- [Quarg / Mack 2005] Quarg, G.; Mack, T. (2005): Munich Chain Ladder, A reserving method that reduces the gap between IBNR projections based on paid losses und IBNR projections based on incurred losses, Blätter der DGVFM, Band XXVI, Heft 4, November 2005
- [Swiss Re 2002] Swiss Re (2002): Die globale Nicht-Leben Versicherung in einer Zeit der Kapazitätsknappheit; Sigma Nr. 4/2002
- [Swiss Re 2005] Swiss Re (2005): Kapitalkosten und Unternehmenswert in der Versicherung: Theorie und Implikationen für die Praxis; Sigma No. 3/2005
- [Swiss Re 2006a] Swiss Re (2006): Versicherungstechnische Profitabilität im Nichtlebensgeschäft; Sigma No. 3/2006
- [Swiss Re 2006b] Swiss Re (2006): Solvency II : Ein integrierter Risikoansatz für europäische Versicherer; Sigma No. 4/2006