# Die Kalkulation von PKV-Tarifen unter Einbeziehung des Übertragungswertes

**Anna Wallner und Hans-Joachim Zwiesler**

Preprint Series: 2009-25

**Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften**
**UNIVERSITÄT ULM**

# Die Kalkulation von PKV-Tarifen unter Einbeziehung des Übertragungswertes

Anna Wallner, Hans-Joachim Zwiesler*

## Inhaltsverzeichnis



# 1 Einleitung

Seit dem 01. Januar 2009 müssen alle neu abgeschlossenen Krankenvollkostentarife eine zusätzliche Leistung vorsehen: den Übertragungswert. Dadurch wird Versicherten die Möglichkeit gegeben, einen Teil ihrer Alterungsrückstellung mitzunehmen, wenn sie in den Krankenvollkostentarif eines anderen PKV-Unternehmens wechseln wollen.

*Universität Ulm

Wie der Übertragungswert bestimmt wird, ist in § 13a KalV festgelegt. Demnach setzt er sich zum einen aus der Alterungsrückstellung, die aus dem gesetzlichen Zuschlag entstanden ist, und zu anderen aus dem tariflichen Übertragungswert zusammen. Der tarifliche Übertragungswert ist nach oben begrenzt durch eine fiktive Alterungsrückstellung, die für den Versicherten – bei entsprechendem Eintrittsalter und identischer Versicherungsdauer – im Basistarif aufgebaut worden wäre. Außerdem darf der Übertragungswert nicht negativ sein. Storniert etwa ein Versicherter mit Eintrittsalter $x$ zum Ende des $m$-ten Versicherungsjahres, um zu einem anderen privaten Krankenversicherer zu wechseln, so errechnet sich sein tariflicher Übertragungswert als

$$ {}_m\ddot{U}_x^T = \max\left\{0;\ \min\left\{\max\left\{{}_mV_x;\ {}_mV_x^{\alpha\, mod}\right\};\ {}_mV_x^{BT}\right\}\right\}, \tag{1}$$

wobei die Bezeichnungen folgendermaßen festgelegt sind:

| | |
|---|---|
| ${}_mV_x^{BT}$ | Höhe der Alterungsrückstellung im Basistarif zum Ende des $m$-ten Vertragsjahres, wenn der Versicherte sich im Alter $x$ im Basistarif versichert hätte, |
| ${}_mV_x$ | Alterungsrückstellung des versicherten Tarifs, |
| ${}_mV_x^{\alpha\, mod}$ | Alterungsrückstellung, die sich ergibt, wenn man die unmittelbaren Abschlusskosten gleichmäßig auf die ersten fünf Jahre verteilt. |

Der Übertragungswert stellt somit eine Leistung an den Kunden dar und muss folglich bei der Kalkulation des Beitrags berücksichtig werden. Somit hängen Beitrag, Rückstellung und Übertragswert wechselseitig voneinander ab; und diese Beziehung ist nicht-linear, wie man an Gleichung (1) sieht. Damit können diese Größen nicht – wie bisher üblich – einfach durch Lösen des Äquivalenzprinzips und der prospektiven Formel für die Alterungsrückstellung bestimmt werden. Vielmehr entsteht ein nicht-lineares Gleichungssystem zur Berechnung der relevanten Größen. Dies wirft in natürlicher Weise mehrere Fragen auf:

- Ist das Gleichungssystem stets lösbar?
- Ist eine Lösung – falls sie existiert – eindeutig?
- Und wie kann eine solche Lösung mit einem stets konvergenten Algorithmus gefunden werden?

All diese Fragen werden wir im Folgenden beantworten. Dazu beschreiben wir in Abschnitt 2 zunächst das Modell eines Vollkostentarifs mit Übertragungswert und leiten das zu lösende Gleichungssystem her. Von ihm zeigen wir in Abschnitt 3, dass es äquivalent zur Lösung der versicherungsmathematischen Bilanzgleichung ist. Diese stellt das zentrale Hilfsmittel für die weiteren Untersuchungen dar. Sie kann nämlich als Rückwärtsrekursion benutzt werden, um alle relevanten Größen zu bestimmen, falls die Prämie bekannt ist. Dadurch reduziert sich die Bestimmung der Prämie auf die Berechnung der Nullstellen einer geeigneten Funktion, von der wir in Abschnitt 4 zeigen, dass sie stetig und streng monoton fallend ist. Daraus können wir dann Existenz und Eindeutigkeit der Nullstelle ableiten. In Kapitel 5 und 6 zeigen wir dann, wie man z.B. mit Hilfe der Regula Falsi die gesuchte Lösung berechnen kann.

# 2 Das Modell der Kalkulation von PKV-Tarifen

Um die Kalkulation des Übertragungswertes zu diskutieren, wird im Folgenden ein männlicher Versicherter mit festem Eintrittsalter $x$ betrachtet. Das Eintrittsalter $x$ soll hierbei zwischen dem Mindestalter $x_{min}$ für diesen Tarif und dem rechnerischen Höchstalter $\omega$ liegen.[1] Um die unmittelbaren Abschlusskosten später auf fünf Jahre verteilen zu können, sollte auch $x \leq \omega - 5$ gelten.[2] Der Rechnungszins $i$ sei konstant.

Die laufenden Kosten seien mit $C_{x,m}^{lfd}$ und die unmittelbaren Abschlusskosten mit $C_{x,m}^{AKO}$ bezeichnet. Die Gesamtkosten $C_{x,m}$, die im $(m+1)$-ten Versicherungsjahr anfallen, ergeben sich daher zu

$$C_{x,m} = C_{x,m}^{lfd} + C_{x,m}^{AKO}, \quad m \in \{0, \ldots, \omega - x\}.$$

Die laufenden Kosten könnten sich beispielsweise aus einer beitragsproportionalen (bezogen auf die Brutto-Prämie $B_x$) und einer fixen Komponente zusammensetzen:

$$C_{x,m}^{lfd} = \sigma_m \cdot B_x + \gamma_m, \quad \sigma_m, \gamma_m \geq 0, \; m \in \{0, \ldots, \omega - x\}.$$

Die Abschlusskosten könnten z. B. beitragsproportional sein und nur einmalig zu Beginn anfallen, so dass

$$C_{x,m}^{AKO} = \alpha \cdot B_x \cdot \mathbb{1}_{\{0\}}(m), \quad m \in \{0, \ldots, \omega - x\}, \; \alpha \geq 0.$$

Alternativ könnte man diese auch folgendermaßen auf die ersten $n$ Jahre verteilen:

$$C_{x,m}^{AKO} = \frac{\alpha \cdot B_x}{a_{x:\overline{n}|}} \cdot \mathbb{1}_{\{0,\ldots,n-1\}}(m), \quad m \in \{0, \ldots, \omega - x\}, \; \alpha \geq 0.$$

[1] Im Basistarif liegt das Mindestalter bei 21 Jahren und das rechnerische Höchstalter bei 102 Jahren.

[2] Sollte diese Anforderung nicht erfüllt sein, so sind die Abschlusskosten gleichmäßig auf die rechnerisch verbleibenden Versicherungsjahre zu verteilen. Unsere Argumente übertragen sich auf diese Fälle analog.

Neben der Gesamtstornowahrscheinlichkeit $w_{x+m}$ bezeichne die Größe $w_{x+m}^{PKV}$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein Versicherter seine substitutive Krankenversicherung im $(x+m+1)$-ten Lebensjahr storniert und daraus ein Anspruch auf die Mitnahme eines Übertragungswertes entsteht. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Versicherter storniert und kein Anrecht auf einen Übertragungswert hat, beträgt demzufolge $w_{x+m} - w_{x+m}^{PKV}$. Für die Berechnung der Verbleibewahrscheinlichkeit ist weiterhin die Gesamtstornowahrscheinlichkeit $w_{x+m}$ zu verwenden:

$$p_{x+m} = 1 - q_{x+m} - w_{x+m} \quad \forall\, m \in \{0, \ldots, \omega - x\}.$$

Das Äquivalenzprinzip[3] liefert damit für die konstante Brutto-Prämie $B_x$:

$$B_x \cdot a_x = A_x + \sum_{k=0}^{\omega-x} C_{x,k} \cdot {}_k p_x \cdot v^k + \sum_{k=0}^{\omega-x-1} {}_{k+1}\ddot{U}_x^T \cdot w_{x+k}^{PKV} \cdot {}_k p_x \cdot v^{k+1}. \tag{2}$$

Die prospektive Alterungsrückstellung zum Ende des $m$-ten Vertragsjahres berechnet sich damit für $m \in \{0, \ldots, \omega - x\}$ zu[4]

$$\begin{aligned} {}_m V_x = A_{x+m} &+ \sum_{k=0}^{\omega-x-m} C_{x,m+k} \cdot {}_k p_{x+m} \cdot v^k \\ &+ \sum_{k=0}^{\omega-x-m-1} {}_{m+k+1}\ddot{U}_x^T \cdot w_{x+m+k}^{PKV} \cdot {}_k p_{x+m} \cdot v^{k+1} - B_x \cdot a_{x+m}. \end{aligned} \tag{3}$$

Nach Auslaufen des Bestandes gibt es keine Alterungsrückstellung mehr, d. h. ${}_{\omega-x+1}V_x = 0$ (folglich ist auch ${}_{\omega-x+1}\ddot{U}_x^T = 0$). Dies entspricht Gleichung (3), wenn wir dort $m = \omega - x + 1$ zulassen, da dann nur leere Summen auftauchen, die alle gleich Null sind.

Für die Berechnung des Übertragungswertes benötigen wir zusätzlich eine (fiktive) Alterungsrückstellung, bei der die unmittelbaren Abschlusskosten des Tarifes gleichmäßig auf die ersten fünf Jahre verteilt werden (im Folgenden gekennzeichnet durch „ $\alpha\, mod$ “):

$$C_{x,m}^{AKO,\alpha\, mod} = \mathbb{1}_{\{0,\ldots,4\}}(m) \cdot \frac{1}{a_{x:\overline{5}|}} \cdot \sum_{k=0}^{\omega-x} C_{x,k}^{AKO} \cdot {}_k p_x \cdot v^k, \; m \in \{0, \ldots, \omega - x\}. \tag{4}$$

[3]Vgl. [Milbrodt 2005], S. 97 ff.; in unserem Modell werden die laufenden Kosten jährlich vorschüssig eingerechnet und die Übertragungswerte jährlich nachschüssig.

[4]Vgl. [Milbrodt 2005], S. 128 f. Oft werden einmalige Abschlusskosten bei ${}_0V_x$ nicht berücksichtigt, um den dadurch entstehenden Sprung in der Alterungsrückstellung bei $m = 0$ zu vermeiden. Für unsere nachfolgenden Überlegungen ist es aber zweckmäßiger, alle Kosten einzubeziehen.

Die Gesamtkosten im $(m+1)$-ten Vertragsjahr belaufen sich dann auf

$$C_{x,m}^{\alpha\, mod} = C_{x,m}^{AKO,\alpha\, mod} + C_{x,m}^{lfd}.$$

Wenn alle weiteren Größen bestehen bleiben, erhält man als fiktive Alterungsrückstellung zum Ende des $m$-ten Vertragsjahres

$$\begin{aligned} {}_mV_x^{\alpha\, mod} = A_{x+m} &+ \sum_{k=0}^{\omega-x-m} C_{x,m+k}^{\alpha\, mod} \cdot {}_kp_{x+m} \cdot v^k \\ &+ \sum_{k=0}^{\omega-x-m-1} {}_{m+k+1}\ddot{U}_x^T \cdot w_{x+m+k}^{PKV} \cdot {}_kp_{x+m} \cdot v^{k+1} - B_x \cdot a_{x+m}. \end{aligned} \tag{5}$$

Wie das Lemma auf der nächsten Seite zeigen wird, folgt aus Gleichung (3), dass ein höherer Kostenbarwert bei ansonsten gleich bleibenden Größen zu einer höheren Alterungsrückstellung führt.

**Lemma 1:**

*(i)* ${}_mV_x$, ${}_mV_x^{\alpha\, mod}$ *und* ${}_m\ddot{U}_x^T$ *sind für alle* $m \in \{0, \ldots, \omega - x\}$ *für beliebige Werte der Prämie* $B_x$ *eindeutig definiert.* $B_x$ *legt folglich die restlichen Größen fest.*

*(ii) Es gilt* ${}_0V_x = {}_0V_x^{\alpha\, mod}$.

*(iii)* $B_x$ *erfüllt das Äquivalenzprinzip genau dann, wenn* ${}_0V_x = 0$ *gilt.*

*Beweis:*

(i) Für den Beweis der obigen Aussage wenden wir Rückwärts-Induktion an. Der Induktionsanfang stimmt, da sich für $m = \omega - x + 1$ – unabhängig von der Höhe der Prämie – stets ergibt, dass

$${}_{\omega-x+1}\ddot{U}_x^T = {}_{\omega-x+1}V_x = {}_{\omega-x+1}V_x^{\alpha\, mod} = 0.$$

Wenn ${}_{m+1}V_x$, ${}_{m+1}V_x^{\alpha\, mod}$ und ${}_{m+1}\ddot{U}_x^T$ für alle $m \geq m_0$, $m_0 \in \{0, \ldots, \omega - x\}$, festliegen, dann kann mit Gleichung (3) auch der Wert für die kalkulatorische Alterungsrückstellung ${}_{m_0}V_x$ und mit Gleichung (5) der Wert für die fiktive Größe ${}_{m_0}V_x^{\alpha\, mod}$ explizit berechnet werden. Wenn wir (1) anwenden, wird außerdem die Höhe des Übertragungswertes ${}_{m_0}\ddot{U}_x^T$ bestimmbar. Daraus folgt, dass sich die Größen dann auch ${}_{m+1}V_x$, ${}_{m+1}V_x^{\alpha\, mod}$ und ${}_{m+1}\ddot{U}_x^T$ für alle $m \geq m_0 - 1$ berechnen lassen. Damit ist der Induktionsschluss gezeigt.

(ii) Der Barwert der unmittelbaren Abschlusskosten ist zum Zeitpunkt $m = 0$ unabhängig davon, ob die Abschlusskosten auf fünf Jahre verteilt werden, da

$$\sum_{k=0}^{\omega-x} C_{x,k}^{AKO,\alpha\, mod} \cdot {}_kp_x \cdot v^k = \frac{1}{a_{x:\overline{5}|}} \cdot \sum_{k=0}^{4} \left( \sum_{\nu=0}^{\omega-x} C_{x,\nu}^{AKO} \cdot {}_\nu p_x \cdot v^\nu \right) \cdot {}_kp_x \cdot v^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\omega-x} C_{x,k}^{AKO} \cdot {}_kp_x \cdot v^k.$$

Mit den Definitionen von ${}_mV_x$ (Gleichung (2)) und ${}_mV_x^{\alpha\, mod}$ (Gleichung (5)) folgt sofort, dass ${}_0V_x = {}_0V_x^{\alpha\, mod}$.

(iii) Aus dem Äquivalenzprinzip (Gleichung (2)) folgt direkt, dass wegen (3) ${}_0V_x = 0$ gelten muss. Umgekehrt folgt aus ${}_0V_x = 0$ und Gleichung (3) sofort, dass $B_x$ dem Äquivalenzprinzip genügt.

□

**Lemma 2:**

*Gegeben sei ein Tarif, bei dem neben allen Rechnungsgrundlagen auch die konstante Brutto-Prämie, die Übertragungswerte sowie alle Alterungsrückstellungen für einen Versicherten mit Eintrittsalter $x$ bereits bekannt seien. Wenn man alle Größen fixiert und allein die Kosten verändert (was mit „~“ gekennzeichnet wird), so dass*

$$\widetilde{C}_{x,m} \geq C_{x,m} \quad \forall\ m \geq m_0 \quad \text{für ein } m_0 \in \mathbb{N},$$

*um damit eine fiktive Alterungsrückstellung zu berechnen, dann ergibt sich für diese fiktive Größe im Vergleich zur kalkulatorischen Alterungrückstellung*

$${}_m\widetilde{V}_x \geq {}_mV_x \quad \forall\ m \geq m_0.$$

*Solange die Höhe der künftigen Kosten in jedem Jahr übereinstimmt, ist auch die Höhe der kalkulatorischen und der fiktiven Alterungsrückstellung gleich:*

$$\widetilde{C}_{x,m} = C_{x,m} \quad \forall\ m \geq m_0 \quad \Rightarrow \quad {}_m\widetilde{V}_x = {}_mV_x \quad \forall\ m \geq m_0.$$

*Beweis:* Die Aussage folgt für alle $m \in \{m_0, \ldots, \omega - x\}$ direkt aus der Definition der prospektiven Alterungsrückstellung (Gleichung (3)):

$${}_m\widetilde{V}_x = A_{x+m} + \sum_{k=0}^{\omega-x-m} \widetilde{C}_{x,m+k} \cdot {}_kp_{x+m} \cdot v^k$$
$$+ \sum_{k=0}^{\omega-x-m-1} {}_{m+k+1}\ddot{U}_x^T \cdot w_{x+m+k}^{PKV} \cdot {}_kp_{x+m} \cdot v^{k+1} - B_x \cdot a_{x+m}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq A_{x+m} + \sum_{k=0}^{\omega-x-m} C_{x,m+k} \cdot {}_kp_{x+m} \cdot v^k \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\omega-x-m-1} {}_{m+k+1}\ddot{U}_x^T \cdot w_{x+m+k}^{PKV} \cdot {}_kp_{x+m} \cdot v^{k+1} - B_x \cdot a_{x+m} \\
&= {}_mV_x .
\end{aligned}
$$

Offensichtlich ist außerdem die Höhe der kalkulatorischen und der fiktiven Alterungsrückstellungen identisch, wenn die Höhe der künftigen Kosten übereinstimmt.

□

Einige der Größen, die für die Kalkulation eines Vollkostentarifes benötigt werden, sind bei einem Versicherten mit Eintrittsalter $x$ bereits für alle $m \in \{0, \ldots, \omega-x+1\}$ bekannt:

- Rechnungsgrundlagen, wie Sterbe- und Stornowahrscheinlichkeiten, der rechnungsmäßige, konstante Zins $i$ und die Kostenparameter $\alpha$ , $\gamma_m$ und $\sigma_m$ ,
- die Kopfschäden $K_{x+m}$ und die damit gebildeten erwarteten Leistungsbarwerte $A_{x+m}$ ,
- die Höhe der Alterungsrückstellungen im Basistarif ${}_mV_x^{BT}$ .

Unbekannt hingegen sind folgende Größen:

- die konstante Brutto-Prämie $B_x$ ,
- die Höhe der Kosten $C_{x,m}$ $\forall m \in \{0, \ldots, \omega - x\}$ , da diese eine beitragsproportionale Komponente enthalten,
- die tarifliche Alterungsrückstellung ${}_mV_x$ $\forall m \in \{0, \ldots, \omega - x\}$ ,
- die Höhe des tariflichen Übertragungswertes ${}_m\ddot{U}_x^T$ $\forall m \in \{1, \ldots, \omega - x\}$.[5]

Die unbekannten Größen sind, wie anhand der Gleichungen (1), (2) und (3) zu erkennen ist, voneinander abhängig und können im Allgemeinen nicht unmittelbar aufgelöst werden. Vielmehr stellen sie ein nicht-lineares Gleichungssystem dar:

[5] Zu Vertragsbeginn gibt es keinen Übertragungwert, da zu diesem Zeitpunkt die Versicherung erst abgeschlossen wird. Es ist also ${}_0\ddot{U}_x^T = 0$ .

$$
(\mathrm{I}) \quad \boxed{\begin{aligned}
B_x \cdot a_x &= A_x + \textstyle\sum_{k=0}^{\omega-x} C_{x,k} \cdot {}_k p_x \cdot v^k + \sum_{k=0}^{\omega-x-1} {}_{k+1}\ddot{U}_x^T \cdot w_{x+k}^{PKV} \cdot {}_k p_x \cdot v^{k+1}, \\
{}_m V_x &= A_{x+m} + \textstyle\sum_{k=0}^{\omega-x-m} C_{x,m+k} \cdot {}_k p_{x+m} \cdot v^k - B_x \cdot a_{x+m} \\
&\quad + \textstyle\sum_{k=1}^{\omega-x-m-1} {}_{m+k+1}\ddot{U}_x^T \cdot w_{x+m+k}^{PKV} \cdot {}_k p_{x+m} \cdot v^{k+1} \\
&\quad \text{für } m \in \{0, \ldots, \omega - x + 1\}.
\end{aligned}}
$$

Dabei ist ${}_m\ddot{U}_x^T$ durch Gleichung (1) definiert. Man beachte, dass das Äquivalenzprinzip zur Bestimmung von $B_x$ (Gleichung (2)) äquivalent zur Gleichung ${}_0V_x = 0$ ist. Wir können also die oberste Gleichung in (I) durch ${}_0V_x = 0$ ersetzen.

## 3 Die versicherungsmathematische Bilanzgleichung

Zentrales Hilfsmittel ist die versicherungsmathematische Bilanzgleichung

$$
\begin{aligned}
p_{x+m} \cdot {}_{m+1}V_x = {} & ({}_mV_x + B_x - K_{x+m} - C_{x,m}) \cdot (1+i) \\
& - w_{x+m}^{PKV} \cdot {}_{m+1}\ddot{U}_x^T,
\end{aligned}
$$

die von den Alterungsrückstellungen erfüllt wird, wie uns der folgende Äquivalenzsatz zeigt. Mit ihrer Hilfe formulieren wir das folgende alternative Gleichungssystem (II):

$$
(\mathrm{II}) \quad \boxed{\begin{aligned}
p_{x+m} \cdot {}_{m+1}V_x &= ({}_mV_x + B_x - K_{x+m} - C_{x,m}) \cdot (1+i) - w_{x+m}^{PKV} \cdot {}_{m+1}\ddot{U}_x^T \\
&\qquad \text{für } m \in \{0, \ldots, \omega - x\}, \\
{}_0V_x &= 0, \\
{}_{\omega-x+1}V_x &= 0.
\end{aligned}}
$$

Dieses ist äquivalent zu (I), wie wir im Äquivalenzsatz zeigen werden. Deshalb können wir (II) anstelle von (I) lösen, um Prämie, Alterungsrückstellungen und damit dann auch die Übertragungswerte zu berechnen.

**Satz 1** (Äquivalenzsatz)**:**
*Die Gleichungssysteme (I) und (II) sind äquivalent.*

*Beweis:* Für alle $m \in \{0, \ldots, \omega - x\}$ gilt aufgrund der Definition von ${}_mV_x$ im

Gleichungssystem (I):

$$
\begin{aligned}
{}_mV_x &= A_{x+m} + \sum_{k=0}^{\omega-x-m} C_{x,m+k} \cdot {}_kp_{x+m} \cdot v^k \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\omega-x-m-1} {}_{m+k+1}\ddot{U}_x^T \cdot w_{x+m+k}^{PKV} \cdot {}_kp_{x+m} \cdot v^{k+1} - B_x \cdot a_{x+m} \\
&= \sum_{k=0}^{\omega-x-m} (K_{x+m+k} + C_{x,m+k} - B_x) \cdot {}_kp_{x+m} \cdot v^k \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\omega-x-m-1} {}_{m+k+1}\ddot{U}_x^T \cdot w_{x+m+k}^{PKV} \cdot {}_kp_{x+m} \cdot v^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\omega-x-m-1} (K_{x+m+k+1} + C_{x,m+k+1} - B_x) \cdot {}_{k+1}p_{x+m} \cdot v^{k+1} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\omega-x-m-2} {}_{m+k+2}\ddot{U}_x^T \cdot w_{x+m+k+1}^{PKV} \cdot {}_{k+1}p_{x+m} \cdot v^{k+2} \\
&\quad + (K_{x+m} + C_{x,m} - B_x) + {}_{m+1}\ddot{U}_x^T \cdot w_{x+m}^{PKV} \cdot v \\
&= p_{x+m} \cdot v \cdot \sum_{k=0}^{\omega-x-m-1} (K_{x+m+k+1} + C_{x,m+k+1} - B_x) \cdot {}_kp_{x+m+1} \cdot v^k \\
&\quad + p_{x+m} \cdot v \cdot \sum_{k=0}^{\omega-x-m-2} {}_{m+k+2}\ddot{U}_x^T \cdot w_{x+m+k+1}^{PKV} \cdot {}_kp_{x+m} \cdot v^{k+1} \\
&\quad + (K_{x+m} + C_{x,m} - B_x) + {}_{m+1}\ddot{U}_x^T \cdot w_{x+m}^{PKV} \cdot v \\
&= p_{x+m} \cdot v \cdot {}_{m+1}V_x + (K_{x+m} + C_{x,m} - B_x) \\
&\quad + {}_{m+1}\ddot{U}_x^T \cdot w_{x+m}^{PKV}
\end{aligned}
$$

Dies ist gerade die versicherungsmathematische Bilanzgleichung (nach ${}_mV_x$ aufgelöst), was die Richtung „(I) $\Rightarrow$ (II)“ beweist. (Die Gleichungen ${}_0V_x = {}_{\omega-x+1}V_x = 0$ wurden schon in Abschnitt 2 gezeigt.)

Die Rückrichtung „(II) $\Rightarrow$ (I)“ folgt per Rückwärtsinduktion nach $m$:
Der Induktionsanfang $(m = \omega - x + 1)$ stimmt wegen ${}_{\omega-x+1}V_x = 0$. Nehmen wir nun an, dass ${}_{m+1}V_x$ für ein $m \in \{1, \ldots, \omega - x\}$ bereits die prospektive Formel (3) erfüllt, dann folgt aus der obigen Umformung (von unten nach oben durchlaufen) und der Gültigkeit der versicherungsmathematischen Bilanzgleichung, dass auch ${}_mV_x$ die prospektive Formel (3) erfüllt, womit der Induktionsschluss gezeigt ist. Das Äquivalenzprinzip zur Berechnung von $B_x$ folgt aus ${}_0V_x = 0$.

$\square$

# 4 Existenz und Eindeutigkeit der Prämie

Im Folgenden betrachten wir nun einen Tarif, bei dem die unmittelbaren Abschlusskosten $AKO$ in Höhe von

$$AKO = \alpha \cdot B_x,\ 0 \leq \alpha < 1,$$

einmalig zu Beginn anfallen.[6] Somit ist für diesen Tarif

$$C_{x,m}^{AKO} = AKO \cdot \mathbb{1}_{\{0\}}(m) = \alpha \cdot B_x \cdot \mathbb{1}_{\{0\}}(m), \quad m \in \{0, \ldots, \omega - x\}.$$

Die laufenden Kosten seien gegeben durch

$$C_{x,m}^{lfd} = \sigma_m \cdot B_x + \gamma_m, \quad m \in \{0, \ldots, \omega - x\},$$

wobei wir stets annehmen wollen, dass

$$0 \leq \sigma_m < 1 - \frac{\alpha}{a_{x:\overline{5|}}} \quad \text{und} \quad \gamma_m \geq 0 \quad \forall\, m \in \{0, \ldots, \omega - x\}$$

gilt.

Wie in Abschnitt 2 beschrieben, wird zusätzlich die prospektive Alterungsrückstellung ${}_mV_x^{\alpha\, mod}$ gebildet, bei der die Abschlusskosten auf die ersten fünf Jahre verteilt werden. Nach Lemma 2 gilt dann ${}_mV_x \leq {}_mV_x^{\alpha\, mod}$ $(\forall m \geq 1)$ und nach Lemma 1 zusätzlich ${}_0V_x = {}_0V_x^{\alpha\, mod}$. Daraus folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} {}_m\ddot{U}_x^T &= \max\left\{0;\ \min\left\{\max\left\{{}_mV_x;\ {}_mV_x^{\alpha\, mod}\right\};\ {}_mV_x^{BT}\right\}\right\} \\ &= \max\left\{0;\ \min\left\{{}_mV_x^{\alpha\, mod};\ {}_mV_x^{BT}\right\}\right\} \end{aligned}$$

Wenn wir also ${}_mV_x^{\alpha\, mod}$ für alle $m$ bestimmen können, so liegt damit der Übertragungswert ${}_m\ddot{U}_x^T$ für jedes $m$ fest und wir können dann den Beitrag $B_x$ mittels (2) und damit alle Alterungsrückstellungen ${}_mV_x$ mittels (3) berechnen.

Zur Bestimmung von ${}_mV_x^{\alpha\, mod}$ betrachten wir einen „Hilfstarif“ (im Folgenden mit „~“ gekennzeichnet), dessen Rechnungsgrundlagen mit denjenigen des (Ausgangs-) Tarifs übereinstimmen – mit Ausnahme der Abschlusskosten, die über fünf Jahre gleichmäßig verteilt werden.

---

[6] Unsere Überlegungen lassen sich auch auf andere Arten der Einrechnung von Abschlusskosten analog übertragen.

**Lemma 3:**

*Erfüllt der Beitrag* $B_x$ *das Äquivalenzprinzip im Ausgangstarif, so erfüllt er es auch im Hilfstarif – und umgekehrt.*

*In diesem Fall gilt* ${}_mV_x \leq {}_mV_x^{\alpha\, mod} = {}_m\widetilde{V}_x$ *und* ${}_m\ddot{U}_x^T = {}_m\widetilde{\ddot{U}}_x^T$.

*Beweis:* Gehen wir zunächst von einem beliebigen Beitrag $B$ aus. Dann können wir nach Lemma 1 sowohl die Größen ${}_mV_x \leq {}_mV_x^{\alpha\, mod}$ und ${}_m\ddot{U}_x^T$ als auch die Größe ${}_m\widetilde{V}_x \left(= {}_m\widetilde{V}_x^{\alpha\, mod}\right)$ und ${}_m\widetilde{\ddot{U}}_x^T$ für dieses B berechnen. Dabei gilt stets

$$ {}_mV_x \overset{Lemma\ 2}{\leq} {}_mV_x^{\alpha\, mod} = {}_m\widetilde{V}_x \quad \text{und} \quad {}_m\ddot{U}_x^T = {}_m\widetilde{\ddot{U}}_x^T, $$

was mittels Rückwärt-Induktion gezeigt werden kann.

Der Induktionsanfang ( $m = \omega - x + 1$ ) ist erfüllt, da

$$ {}_{\omega-x+1}V_x = 0 = {}_{\omega-x+1}V_x^{\alpha\, mod} = {}_{\omega-x+1}\widetilde{V}_x $$

und damit auch

$$ {}_{\omega-x+1}\ddot{U}_x^T = 0 = {}_{\omega-x+1}\widetilde{\ddot{U}}_x^T. $$

Wir nehmen an, dass es ein $m_0 \in \{0, \ldots, \omega - x\}$ gibt, so dass die Ungleichung ${}_{m+1}V_x \leq {}_{m+1}V_x^{\alpha\, mod} = {}_{m+1}\widetilde{V}_x$ und damit auch die Gleichung ${}_{m+1}\ddot{U}_x^T = {}_{m+1}\widetilde{\ddot{U}}_x^T$ für alle $m \geq m_0$ erfüllt ist. Dann ergibt sich aus (3)

$$ \begin{aligned} {}_mV_x = A_{x+m} &+ \sum_{k=0}^{\omega-x-m} C_{x,m+k} \cdot {}_kp_{x+m} \cdot v^k \\ &+ \sum_{k=0}^{\omega-x-m-1} {}_{m+k+1}\ddot{U}_x^T \cdot w_{x+m+k}^{PKV} \cdot {}_kp_{x+m} \cdot v^{k+1} - B \cdot a_{x+m} \\ \leq A_{x+m} &+ \sum_{k=0}^{\omega-x-m} \widetilde{C}_{x,m+k} \cdot {}_kp_{x+m} \cdot v^k \\ &+ \sum_{k=0}^{\omega-x-m-1} {}_{m+k+1}\widetilde{\ddot{U}}_x^T \cdot w_{x+m+k}^{PKV} \cdot {}_kp_{x+m} \cdot v^{k+1} - B \cdot a_{x+m} \\ &= {}_m\widetilde{V}_x = {}_mV_x^{\alpha\, mod}. \end{aligned} $$

Hieraus folgt mit (1) außerdem die Gleichheit der Übertragungswerte ${}_m\ddot{U}_x^T$ und ${}_m\widetilde{\ddot{U}}_x^T$.

Daraus folgt der Induktionsschluss, da somit gezeigt wurde, dass die Ungleichung ${}_{m+1}V_x \leq {}_{m+1}V_x^{\alpha\, mod} = {}_{m+1}\widetilde{V}_x$ und die Gleichung ${}_{m+1}\ddot{U}_x^T = {}_{m+1}\widetilde{\ddot{U}}_x^T$ für alle $m \geq m_0 - 1$ erfüllt ist.

Nach Lemma 1 (ii) gilt insbesondere, dass ${}_0V_x = {}_0V_x^{\alpha\, mod} = {}_0\widetilde{V}_x$. Gilt nun für $B = B_x$ das Äquivalenzprinzip im Ausgangstarif, so ist dies äquivalent zu ${}_0V_x = 0$. Dies ist aber wie wir gerade gesehen haben gleichbedeutend mit ${}_0\widetilde{V}_x = 0$, also damit, dass $B = B_x$ das Äquivalenzprinzip im Hilfstarif erfüllt.

□

Wenn man die unbekannten Größen also zunächst für denjenigen Fall berechnet, bei dem die Abschlusskosten gleichmäßig auf die ersten fünf Jahre verteilt werden, lassen sich darauf aufbauend dann alle weiteren Größen für den eigentlichen Tarif mit den einmalig anfallenden Abschlusskosten explizit aus den Gleichungen (2) und (3) bestimmen, weil der Übertragungswert ${}_m\ddot{U}_x^T (= {}_m\widetilde{\ddot{U}}_x^T)$ bekannt ist. Aus diesem Grund werden im Folgenden die Abschlusskosten wie in Gleichung (4) auf fünf Jahre verteilt. Um die unbekannten Größen zu ermitteln, genügt es nach dem Äquivalenzsatz, das Gleichungssystem (II) zu lösen. Im Folgenden kennzeichnen wir den Hilfstarif aus Vereinfachungsgründen mit „ $\alpha\, mod$ “.

Ein Lösungsansatz ergibt sich, wenn man die versicherungsmathematische Bilanzgleichung für $m = 0, \ldots, \omega - x$ als Rückwärtsrekursion interpretiert:

$$\begin{aligned} {}_mV_x^{\alpha\, mod} = {}& p_{x+m} \cdot v \cdot {}_{m+1}V_x^{\alpha\, mod} + (K_{x+m} + C_{x,m}^{\alpha\, mod} - B_x) \\ & + \max\{0;\ \min\{{}_{m+1}V_x^{\alpha\, mod};\ {}_{m+1}V_x^{BT}\}\} \cdot w_{x+m}^{PKV} \cdot v. \end{aligned} \tag{6}$$

Dieser Ansatz ermöglicht es, alle Alterungsrückstellungen zu berechnen, wenn die Brutto-Prämie $B_x$ und die Alterungsrückstellung ${}_{\omega-x+1}V_x^{\alpha\, mod}$ bekannt sind. Man weiß bereits, dass ${}_{\omega-x+1}V_x^{\alpha\, mod} = 0$ gilt. Die Brutto-Prämie $B_x$ ist allerdings noch unbekannt und kann mit Hilfe des in Abschnitt 5 beschriebenen iterativen Verfahrens bestimmt werden.

Hierfür setzen wir für $B_x$ zunächst einen beliebigen reellen Wert $\xi$ ein und lösen damit die Rekursion (6) ausgehend von ${}_{\omega-x+1}V_x^{\alpha\, mod} = 0$ rückwärts auf. Dadurch erhalten wir eindeutige Werte ${}_mV_x^{\alpha\, mod}(\xi)$ für $m = 0, \ldots, \omega - x$.
Ist ${}_0V_x^{\alpha\, mod}(\xi) = 0$, so handelt es sich bei $B_x = \xi$ um einen Wert für die Brutto-Prämie. Diese Eigenschaft wird im Folgenden verwendet, um die Brutto-Prämie und damit alle Alterungsrückstellungen zu bestimmen. Satz 2 wird zeigen, dass die Funktion ${}_0V_x^{\alpha\, mod}(\xi)$ stets genau eine Nullstelle besitzt und die Höhe der Brutto-Prämie daher eindeutig bestimmt ist.

**Lemma 4:**

*Die Funktion* ${}_mV_x^{\alpha\,mod} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \xi \mapsto {}_mV_x^{\alpha\,mod}(\xi)$ *, ist für alle* $m \in \{0, \ldots, \omega - x + 1\}$ *stetig, streng monoton fallend und stückweise linear.*

*Beweis:* Im $(\omega - x + 1)$-ten Versicherungsjahr beträgt die Verbleibewahrscheinlichkeit $p_\omega = 0$. Und es gilt, dass ${}_{\omega-x+1}V_x^{\alpha\,mod} = 0$. Unter Verwendung von Gleichung (6) erhält man damit am Ende des $(\omega - x)$-ten Vertragsjahres:

$$
\begin{aligned}
{}_{\omega-x}V_x^{\alpha\,mod}(\xi) &= p_\omega \cdot v \cdot {}_{\omega-x+1}V_x^{\alpha\,mod} + K_\omega + C_{x,\omega-x}^{\alpha\,mod} - \xi \\
&\qquad + \max\left\{0;\ \min\left\{{}_{\omega-x+1}V_x^{\alpha\,mod};\ {}_{\omega-x+1}V_x^{BT}\right\}\right\} \cdot w_\omega^{PKV} \cdot v \\
&= K_\omega + \gamma_{\omega-x} - (1 - \sigma_{\omega-x}) \cdot \xi.
\end{aligned}
$$

Nach Voraussetzung ist $\sigma_{\omega-x} < 1 - \frac{\alpha}{a_{x:\overline{5|}}} \leq 1$. Daraus folgt, dass ${}_{\omega-x}V_x^{\alpha\,mod}(\xi)$ linear mit negativer Steigung und somit auch stetig und streng monoton fallend in $\xi$ ist.

Stützt man sich nun induktiv auf die Hypothese, dass die Funktion ${}_{m+1}V_x^{\alpha\,mod}(\xi)$ für ein $m \in \{1, \ldots, \omega - x\}$ stetig, streng monoton fallend und stückweise linear ist, dann erhält man für $m \in \{5, \ldots, \omega - x\}$:

$$
\begin{aligned}
{}_mV_x^{\alpha\,mod}(\xi) &= p_{x+m} \cdot v \cdot {}_{m+1}V_x^{\alpha\,mod}(\xi) + K_{x+m} + C_{x,m}^{\alpha\,mod} - \xi \\
&\qquad + \max\left\{0;\ \min\left\{{}_{m+1}V_x^{\alpha\,mod}(\xi);\ {}_{m+1}V_x^{BT}\right\}\right\} \cdot w_{x+m}^{PKV} \cdot v \\
&= p_{x+m} \cdot v \cdot {}_{m+1}V_x^{\alpha\,mod}(\xi) + K_{x+m} + \gamma_m - (1 - \sigma_m) \cdot \xi \\
&\qquad + \max\left\{0;\ \min\left\{{}_{m+1}V_x^{\alpha\,mod}(\xi);\ {}_{m+1}V_x^{BT}\right\}\right\} \cdot w_{x+m}^{PKV} \cdot v
\end{aligned}
$$

bzw. für $m \in \{0, \ldots, 4\}$

$$
\begin{aligned}
{}_mV_x^{\alpha\,mod}(\xi) &= p_{x+m} \cdot v \cdot {}_{m+1}V_x^{\alpha\,mod}(\xi) + K_{x+m} + \gamma_m - (1 - \sigma_m - \frac{\alpha}{a_{x:\overline{5|}}}) \cdot \xi \\
&\qquad + \max\left\{0;\ \min\left\{{}_{m+1}V_x^{\alpha\,mod}(\xi);\ {}_{m+1}V_x^{BT}\right\}\right\} \cdot w_{x+m}^{PKV} \cdot v.
\end{aligned}
$$

Die Funktion ${}_mV_x^{\alpha\,mod}(\xi)$ ist folglich stetig, streng monoton fallend und stückweise linear in $\xi$, da

- $p_{x+m} \cdot v \cdot {}_{m+1}V_x^{\alpha\,mod}(\xi)$ laut Hypothese stetig, streng monoton fallend und stückweise linear in $\xi$ ist,
- $K_{x+m} + \gamma_m$ konstant, da unabhängig von $\xi$, ist,
- $-(1 - \sigma_m) \cdot \xi$ bzw. $-(1 - \sigma_m - \frac{\alpha}{a_{x:\overline{5|}}}) \cdot \xi$ als lineare Funktionen auch stetig und streng monoton fallend in $\xi$ sind, da $\sigma_m < 1 - \frac{\alpha}{a_{x:\overline{5|}}}$ vorausgesetzt wurde,

- der Übertragungswert $\max\left\{0;\ \min\left\{{}_{m+1}V_x^{\alpha\,mod}(\xi);\ {}_{m+1}V_x^{BT}\right\}\right\} \cdot w_{x+m}^{PKV} \cdot v$ stetig, monoton fallend und stückweise linear in $\xi$, da ${}_{m+1}V_x^{\alpha\,mod}(\xi)$ laut Hypothese stetig, streng monoton fallend und stückweise linear und ${}_{m+1}V_x^{BT}$ konstant in $\xi$ ist.

Somit ist jedes ${}_mV_x^{\alpha\,mod}(\xi)$ stetig, streng monoton fallend und stückweise linear in $\xi$. Also folgt insbesondere, dass die Funktion ${}_0V_x^{\alpha\,mod}(\xi)$ in $\xi$ stetig, streng monoton fallend und stückweise linear ist.

□

**Satz 2:**
*Die Funktion ${}_0V_x^{\alpha\,mod}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt genau eine Nullstelle.*

*Beweis:* Um die Existenz zu beweisen, zeigt man zunächst, dass es ein $\xi_a \in \mathbb{R}$ mit ${}_0V_x^{\alpha\,mod}(\xi_a) \geq 0$ und ein $\xi_b \in \mathbb{R}$ mit ${}_0V_x^{\alpha\,mod}(\xi_b) \leq 0$ gibt.

Sei $\xi_a = \xi_0$ die Brutto-Prämie, die sich ergibt, wenn der tarifliche Übertragungswert in jedem Jahr gleich Null gesetzt wird. Als $\xi_0$ wählen wir in diesem Fall (gemäß Äquivalenzprinzip):[7]

$$\begin{aligned}
\xi_0 \cdot a_x &= A_x + \sum_{k=0}^{\omega-x}\left(\sigma_k \cdot \xi_0 + \gamma_k + \frac{\alpha}{a_{x:\overline{5}|}} \cdot \xi_0 \cdot \mathbb{1}_{\{0,\dots,4\}}(k)\right) \cdot {}_kp_x \cdot v^k \\
\Leftrightarrow \xi_0 &= \frac{A_x + \sum_{k=0}^{\omega-x} \gamma_k \cdot {}_kp_x \cdot v^k}{a_x - \sum_{k=0}^{\omega-x}\left(\sigma_k \cdot \xi_0 + \frac{\alpha}{a_{x:\overline{5}|}} \cdot \xi_0 \cdot \mathbb{1}_{\{0,\dots,4\}}(k)\right) \cdot {}_kp_x \cdot v^k}
\end{aligned}$$

Für die Alterungsrückstellung zu Vertragsbeginn ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
&{}_0V_x^{\alpha\,mod}(\xi_0) \\
&= A_x + \sum_{k=0}^{\omega-x}\left(\sigma_k \cdot \xi_0 + \gamma_k + \frac{\alpha}{a_{x:\overline{5}|}} \cdot \xi_0 \cdot \mathbb{1}_{\{0,\dots,4\}}(k)\right) \cdot {}_kp_x \cdot v^k - \xi_0 \cdot a_x \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \max\left\{0;\ \min\left\{{}_{k+1}V_x^{\alpha\,mod}(\xi_0);\ {}_{k+1}V_x^{BT}\right\}\right\} \cdot w_{x+k}^{PKV} \cdot {}_kp_x \cdot v^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \max\left\{0;\ \min\left\{{}_{k+1}V_x^{\alpha\,mod}(\xi_0);\ {}_{k+1}V_x^{BT}\right\}\right\} \cdot w_{x+k}^{PKV} \cdot {}_kp_x \cdot v^{k+1} \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

[7]Wegen $\sigma_m < 1 - \alpha/a_{x:\overline{5}|}$ sind im Folgenden alle Nenner $\neq 0$.

Sei durch $\xi_b = \xi_{BT}$ die Prämie gegeben, die man erhält, wenn der tarifliche Übertragungswert stets der Alterungsrückstellung im Basistarif entsprechen würde, sofern diese positiv ist:

$$_m\ddot{U}_x^T = \max\{0;\ _mV_x^{BT}\} \ \ \forall\, m \in \{1, \ldots, \omega - x\}.$$

Als Brutto-Prämie $\xi_{BT}$ ergibt sich in diesem Fall:

$$\begin{aligned}\xi_{BT} \cdot a_x = A_x &+ \sum_{k=0}^{\omega-x} (\sigma_k \cdot \xi_0 + \gamma_k + \frac{\alpha}{a_{x:\overline{5}|}} \cdot \xi_0 \cdot \mathbb{1}_{\{0,\ldots,4\}}(k)) \cdot {}_kp_x \cdot v^k \\ &+ \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \max\{0;\ _{k+1}V_x^{BT}\} \cdot w_{x+k}^{PKV} \cdot {}_kp_x \cdot v^{k+1}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \xi_{BT} = \frac{A_x + \sum_{k=0}^{\omega-x} \gamma_k \cdot {}_kp_x \cdot v^k + \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \max\{0;\ _{k+1}V_x^{BT}\} w_{x+k}^{PKV} \cdot {}_kp_x \cdot v^{k+1}}{a_x - \sum_{k=0}^{\omega-x} (\sigma_k \cdot \xi_0 + \frac{\alpha}{a_{x:\overline{5}|}} \cdot \xi_0 \cdot \mathbb{1}_{\{0,\ldots,4\}}(k)) \cdot {}_kp_x \cdot v^k}$$

Damit berechnet sich die Alterungsrückstellung zu Vertragsbeginn zu

$$\begin{aligned}&_0V_x^{\alpha\, mod}(\xi_{BT}) \\ &= A_x + \sum_{k=0}^{\omega-x} C_{x,k}^{\alpha\, mod} \cdot {}_kp_x \cdot v^k - \xi_{BT} \cdot a_x \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \max\left\{0;\ \min\left\{_{k+1}V_x^{\alpha\, mod}(\xi_0);\ _{k+1}V_x^{BT}\right\}\right\} \cdot w_{x+k}^{PKV} \cdot {}_kp_x \cdot v^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \max\left\{0;\ \min\left\{_{k+1}V_x^{\alpha\, mod}(\xi_0);\ _{k+1}V_x^{BT}\right\}\right\} \cdot w_{x+k}^{PKV} \cdot {}_kp_x \cdot v^{k+1} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \max\{0;\ _{k+1}V_x^{BT}\} \cdot w_{x+k}^{PKV} \cdot {}_kp_x \cdot v^{k+1} \\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Ist $_0V_x^{\alpha\, mod}(\xi_0) = 0$ oder $_0V_x^{\alpha\, mod}(\xi_{BT}) = 0$, so ist mit $\xi_0$ bzw. $\xi_{BT}$ bereits eine Nullstelle gefunden. Es gelte daher o. B. d. A.

$$_0V_x^{\alpha\, mod}(\xi_a) > 0 > {}_0V_x^{\alpha\, mod}(\xi_b).$$

Da laut Lemma 4 die Funktion $_0V_x^{\alpha\, mod}$ streng monoton fallend in $\xi$ ist, folgt dass $\xi_a < \xi_b$. Mit Lemma 4 wurde außerdem gezeigt, dass $_0V_x^{\alpha\, mod}$ stetig in $\xi$ ist für alle $\xi \in \mathbb{R}$. Somit ist $_0V_x^{\alpha\, mod}(\xi)$ auch auf dem kompakten Intervall $[\xi_a, \xi_b]$ stetig. Daraus folgt mit dem Zwischenwertsatz von Bolzano,[8] dass es ein $\bar{\xi} \in (\xi_a, \xi_b)$ gibt mit $_0V_x^{\alpha\, mod}(\bar{\xi}) = 0$.

[8] Vgl. [Schulz 2002], S. 169.

Die Eindeutigkeit folgt direkt aus Lemma 4: Da ${}_0V_x^{\alpha\, mod}$ in $\xi$ streng monoton fällt, ist die Nullstelle dieser Funktion eindeutig bestimmt.

$\square$

Die gesuchte Brutto-Prämie $B_x$ kann durch numerisches Lösen der Gleichung ${}_0V_x^{\alpha\, mod}(\xi) = 0$ gefunden werden.[9] Wie im Beweis zu Satz 2, kann man hierbei beispielsweise $[\xi_0; \xi_{BT}]$ als Startintervall wählen. Der untere Randpunkt $\xi_0$ ist durch die traditionelle Brutto-Prämie gegeben, da die Höhe des Übertragungswertes als Null angenommen wird. Der obere Randpunkt $\xi_{BT}$ entspricht der Brutto-Prämie, welche sich ergibt, wenn man annimmt, dass als Übertragungswert stets die Alterungsrückstellung des Basistarifs mitgegeben wird, wenn diese nicht negativ ist, und Null andernfalls.

Für beide Randpunkte berechnet man durch rückwärtiges Durchlaufen der versicherungsmathematischen Bilanzgleichung den Funktionswert ${}_0V_x^{\alpha\, mod}(\xi_a)$ bzw. ${}_0V_x^{\alpha\, mod}(\xi_b)$. Wenn einer der beiden Werte gleich Null ist, ist die gesuchte Brutto-Prämie bereits gefunden. Genauer gilt:

(i) ${}_0V_x^{\alpha\, mod}(\xi_a) = 0 \quad \Rightarrow B_x = \xi_a,$

(ii) ${}_0V_x^{\alpha\, mod}(\xi_b) = 0 \quad \Rightarrow B_x = \xi_b,$

(iii) ${}_0V_x^{\alpha\, mod}(\xi_b) < 0 < {}_0V_x^{\alpha\, mod}(\xi_a) \quad \Rightarrow \xi_a < B_x < \xi_b.$

Wenn Fall (iii) zutrifft, kann die gesuchte Brutto-Prämie z. B. mit Hilfe der Regula Falsi[10] durch folgenden Algorithmus bestimmt werden.[11]

---

[9]Die Funktion ${}_mV_x^{\alpha\, mod}$ ist laut Lemma 4 für alle $m \in \{0, \ldots, \omega - x\}$ stückweise linear. Aus diesem Grund kann die Nullstelle mit Hilfe eines endlichen Algorithmus, der höchstens $3^{\omega-x}$-mal durchlaufen wird, berechnet werden. Hierbei geht man für jedes Vertragsjahr $m \in \{0, \ldots, \omega-x-1\}$ schrittweise jeweils die drei Möglichkeit für den Übertragungswert ${}_{m+1}\ddot{U}_x^T$ – also 0, ${}_{m+1}V_x^{BT}$ und ${}_{m+1}V_x^{\alpha\, mod}$ – so lange einzeln durch und löst das jeweilige lineare Gleichungssystem, das sich daraus ergibt, bis man die Kombination findet, die ${}_0V_x^{\alpha\, mod} = 0$ liefert. Für praktische Zwecke gibt es allerdings numerische Verfahren, wie etwa die Regula Falsi, die mit erheblich weniger Aufwand zu sehr guten Näherungen führen.

[10]Vgl. hierzu [Stoer/Bulirsch 2007], S. 326 f. Dort wird auch gezeigt, dass die Regula Falsi die Konvergenzgeschwindigkeit $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ besitzt.

[11]In der Praxis werden hier auch andere Verfahren verwendet, z. B. das interne und das externe Modell. Genauere Konvergenzaussagen hierzu sind den Verfassern nicht bekannt.

# 5 Ein Algorithmus zur Berechnung der Prämie

Zunächst wählen wir als Abbruchkriterium eine Genauigkeit $\varepsilon > 0$; d. h. wir beenden den Algorithmus, sobald $\left|{}_0V_x^{\alpha\, mod}(\xi)\right| \leq \varepsilon$ ist und wählen $\xi$ dann als Näherung der gesuchten Brutto-Prämie.

**Schritt 0:** Bestimme ein $\xi_a$ mit ${}_0V_x^{\alpha\, mod}(\xi_a) \geq 0$ und anschließend ein $\xi_b$ mit ${}_0V_x^{\alpha\, mod}(\xi_b) \leq 0$, z. B. $\xi_a = \xi_0$ und $\xi_b = \xi_{BT}$ aus Abschnitt 4.

Man errechne jeweils für $\xi = \xi_a$ und $\xi = \xi_b$ durch Durchlaufen der Gleichung (6) von $m = \omega - x$ bis $m = 0$

$$\begin{aligned} {}_mV_x^{\alpha\, mod}(\xi) = {} & p_{x+m} \cdot v \cdot {}_{m+1}V_x^{\alpha\, mod}(\xi) + K_{x+m} + C_{x,m}^{\alpha\, mod} - \xi \\ & + \max\left\{0;\ \min\left\{{}_{m+1}V_x^{\alpha\, mod}(\xi);\ {}_{m+1}V_x^{BT}\right\}\right\} \cdot w_{x+m}^{PKV} \cdot v. \end{aligned}$$

Anschließend ist zu überprüfen, ob die Nullstelle und damit auch die entsprechende Brutto-Prämie auf diese Weise bereits bestimmt werden konnte:

(i) $\left|{}_0V_x^{\alpha\, mod}(\xi_a)\right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \xi_a$ ist die gesuchte Brutto-Prämie,

(ii) $\left|{}_0V_x^{\alpha\, mod}(\xi_b)\right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \xi_b$ ist die gesuchte Brutto-Prämie.

Ist eine der Bedingungen erfüllt, so wird der Algorithmus abgebrochen. Andernfalls bildet $[\xi_a; \xi_b]$ das Startintervall, mit dem man zu Schritt 1 übergeht.

**Schritt 1:** Man bestimme den Sekanten-Punkt

$$\xi = \xi_b - \frac{(\xi_b - \xi_a) \cdot {}_0V_x^{\alpha\, mod}(\xi_b)}{{}_0V_x^{\alpha\, mod}(\xi_b) - {}_0V_x^{\alpha\, mod}(\xi_a)}.$$

und den zugehörigen Wert für die Alterungsrückstellung ${}_0V_x^{\alpha\, mod}(\xi)$, in dem man die versicherungsmathematische Bilanzgleichung für $\xi$ wie in Schritt 0 durchläuft.

Anschließend wird der Algorithmus mit Schritt 2 fortgesetzt.

**Schritt 2:** Der Algorithmus wird abgebrochen, wenn die Bedingung

$$\left|{}_0V_x^{\alpha\, mod}(\xi)\right| \leq \varepsilon$$

erfüllt ist. In diesem Fall ist $\xi$ die gesuchte Brutto-Prämie.

Andernfalls werden die Randpunkte des Intervalls, in dem nach der Nullstelle gesucht werden soll, neu gesetzt. Dabei wird eine der bisherigen Intervallgrenzen ausgetauscht, so dass die Nullstelle auch im neuen, kleineren Intervall liegt:

$$[\xi_a, \xi_b] = \begin{cases} [\xi_a, \xi] & \text{wenn } {}_0V_x^{\alpha\, mod}(\xi_a) \cdot {}_0V_x^{\alpha\, mod}(\xi) < 0, \\ [\xi, \xi_b] & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit dem verkleinerten Intervall wird der Algorithmus bei Schritt 1 fortgesetzt.

# 6 Beispiel

Harry Mustermann schließt im Alter von 25 Jahren eine Krankenvollkostenversicherung ab, die ihn dazu berechtigt, beim Wechsel des privaten Versicherers einen Übertragungswert mitzunehmen.

Zur Kalkulation seines Tarifes werden folgende Rechnungsgrundlagen verwendet:

- Die Kostenparameter sind gegeben durch $\alpha = 25\,\%$, $\sigma_m = \sigma = 10\,\%$ und $\gamma_m = \gamma = 155\,\text{Euro}$ für alle $m \in \{0, \ldots, \omega - x\}$.
- Die Kopfschäden werden als $45\,\%$ der Summe aus den Kopfschadenstatistiken von vier Tarifen für das Jahr 2007 ermittelt: einem Ambulanttarif mit einem Selbstbehalt von 0-100 Euro (AmbSo_0-100_07), einem Stationärtarif Zweibettzimmer (Stat_ZB_07), Zahnersatz mit 50 - 65 % Erstattung (ZaErs50-65_07) und Zahnbehandlung mit $100\,\%$ Erstattung (Zahnbeh_07).
- Es wird die Sterbetafel 2009 herangezogen.
- Die Werte für die Gesamtstornowahrscheinlichkeiten $w_x$ werden der BaFin-Storno-Tabelle 2006 entnommen. Für die PKV-Stornowahrscheinlichkeiten $w_x^{PKV}$ werden diese um das GKV-Storno $w_x^{GKV}$ reduziert. Die Größe $w_x^{GKV}$ ergibt sich dabei aus dem Produkt der Gesamtstornowahrscheinlichkeiten $w_x$ und einem altersabhängigen Faktor, der auch in der Kalkulation des Basistarifs verwendet wird ($= w_x^{GKV,BT}/w_x^{BT}$). Es wird also angenommen, dass
$$w_x^{GKV} = w_x \cdot \left(1 - \frac{w_x^{GKV,BT}}{w_x^{BT}}\right).$$
- Das rechnerische Höchstalter $\omega$ betrage 102 Jahre.
- Der Rechnungszins liege bei $3,5\,\%$.

Der Basistarif und dessen Alterungsrückstellungen, die man für die Kalkulation benötigt, sind unabhängig von den oben genannten Rechnungsgrundlagen.

Wir wollen nun ${}_mV_{25}^{\alpha\,mod}$ und den zugehörigen Beitrag $B_{25}$ bestimmen. Als Abbruchkriterium verwenden wir $\varepsilon = 10^{-3}$

Wenn man annimmt, dass der Übertragungswert für Harry Mustermann in jedem Jahr Null Euro beträgt, so erhält man als Brutto-Prämie[12]

$$\xi_a \cdot a_{25} = A_{25} + \sum_{k=0}^{\omega-25} C_{25,k}^{\alpha\, mod} \cdot {}_k p_{25} \cdot v^k = A_{25} + \gamma \cdot a_{25} + (\sigma \cdot a_{25} + \alpha) \cdot \xi_a$$

$$\Rightarrow \xi_a = 1.497,67.$$

Nimmt man statt dessen an, dass der Übertragungswert für Harry Mustermann in jedem Jahr der Alterungsrückstellung im Basistarif entspricht, sofern dieser positiv ist, so ergibt sich für die Brutto-Prämie

$$\begin{aligned}\xi_b \cdot a_{25} = A_{25} + \gamma \cdot a_{25} + &\sum_{k=0}^{\omega-25-1} \max\{0;\ {}_{k+1}V_{25}^{BT}\} \cdot w_{25+k}^{PKV} \cdot {}_k p_{25} \cdot v^{k+1} \\ &+ (\sigma \cdot a_{25} + \alpha) \cdot \xi_b\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \xi_b = 1.812,16.$$

Wenn man den Wert $\xi_a$ für die Brutto-Prämie in die versicherungsmathematische Bilanzgleichung einsetzt, um ${}_0V_{25}^{\alpha\, mod}(\xi_a)$ zu berechnen, erhält man:

$${}_0V_{25}^{\alpha\, mod}(\xi_a) = 2.536,90.$$

Verwendet man den Wert $\xi_b$ für die Brutto-Prämie, ergibt sich für die Alterungsrückstellungen:

$${}_0V_{25}^{\alpha\, mod}(\xi_b) = -29,52.$$

Da weder $\xi_a$ noch $\xi_b$ die Lösung liefern, wird nun die genaue Höhe der Brutto-Prämie auf Basis der Regula Falsi bestimmt.

**Schritt 0:** Das Startintervall ist durch $[\xi_a; \xi_b] = [1.497,67; 1.812,16]$ gegeben. Wie bereits gezeigt wurde, errechnen sich die Funktionswerte an Stelle der Intervallgrenzen zu ${}_0V_{25}^{\alpha\, mod}(\xi_a) = 2.536,90$ und ${}_0V_{25}^{\alpha\, mod}(\xi_b) = -29,52$. Damit ist weder $\xi_a$ noch $\xi_b$ die gesuchte Brutto-Prämie.

[12] Beachte, dass der Barwert der Abschlusskosten stets $\alpha \cdot \xi$ beträgt, auch bei Verteilung auf fünf Jahre.

**Schritt 1:** Der Sekanten-Punkt berechnet sich zu

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_b - \frac{(\xi_b - \xi_a) \cdot {}_0V_{25}^{\alpha\, mod}(\xi_b)}{{}_0V_{25}^{\alpha\, mod}(\xi_b) - {}_0V_{25}^{\alpha\, mod}(\xi_a)} \\ &= 1.808,54.\end{aligned}$$

Hiermit wird der Funktionswert ${}_0V_{25}^{\alpha\, mod}(\xi)$ rekursiv bestimmt:

$${}_0V_{25}^{\alpha\, mod}(\xi) = 10,92.$$

**Schritt 2:** Überprüfe nun das Abbruchkriterium:

$${}_0V_{25}^{\alpha\, mod}(\xi) = 10,92 > \varepsilon_1 = 10^{-3}.$$

Da die Bedingung nicht erfüllt ist, wird einer der Intervallrandpunkte neu gesetzt, so dass weiterhin die Gleichung

$${}_0V_{25}^{\alpha\, mod}(\xi_a) \cdot {}_0V_{25}^{\alpha\, mod}(\xi_b) < 0$$

erfüllt ist. Es ist also $\xi_a = 1.808,54$ zu wählen.

**Schritt 1:** Mit den neuen Intervallrandpunkten wird erneut ein Sekanten-Punkt bestimmt

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_b - \frac{(\xi_b - \xi_a) \cdot {}_0V_{25}^{\alpha\, mod}(\xi_b)}{{}_0V_{25}^{\alpha\, mod}(\xi_b) - {}_0V_{25}^{\alpha\, mod}(\xi_a)} \\ &= 1.809,52\end{aligned}$$

und mit dem Ergebnis der Funktionswert ${}_0V_{25}^{\alpha\, mod}(\xi)$ neu berechnet:

$${}_0V_{25}^{\alpha\, mod}(\xi) = 0,00.$$

**Schritt 2:** Der Algorithmus kann nun abgebrochen werden, da das Abbruchkriterium erfüllt ist:

$${}_0V_{25}^{\alpha\, mod}(\xi) = 0,00 < \varepsilon.$$

Eine Näherung für die gesuchte Brutto-Prämie ist folglich durch $B_{25} = \xi = 1.809,52$ gegeben.

# Literatur

[Milbrodt 2005]
Milbrodt, H.: Aktuarielle Methoden der deutschen Privaten Krankenversicherung.
Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik, Heft 34, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe, 2005

[Schulz 2002]
Schulz, F.: Analysis 1.
Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München, 2002

[Stoer/Bulirsch 2007]
Stoer, J., Bulirsch R.: Numerische Mathematik 1.
Springer Lehrbuch, Springer, Berlin, 2007