

Hedging von garantierten Ablaufleistungen in Fondspolices

Stefan Graf, Melanie Hauser und Hans-Joachim Zwiesler

Preprint Series: 2009-20



Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
UNIVERSITÄT ULM



Universität Ulm
Fakultät für Mathematik und
Wirtschaftswissenschaften

Hedging von
garantierten Ablaufleistungen
in Fondspolicen

von
Stefan Graf¹, Melanie Hauser²,
Hans-Joachim Zwiesler³

¹Institut für Finanz- und Aktuarwissenschaften (ifa)

²Universität Ulm

³Universität Ulm

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	i
1 Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Literaturüberblick	1
1.3 Aufbau der Arbeit	2
2 Modell	3
2.1 Modellierung des Versicherungsvertrages	3
2.2 Modellierung des Finanzmarktes	3
3 Delta-Rho-Hedging	7
3.1 Grundkonzept	7
3.2 Bewertung der Garantie und faire Garantiegebühr	9
3.3 Greeks der Garantie	10
3.4 Wahl der Hedge-Assets	11
3.5 Reservekonto	11
3.6 Bewertung der Hedge-Assets	12
3.7 Greeks der Hedge-Assets	14
3.8 Zusammensetzung des Hedgeportfolios	15
4 Simulationen und ihre Ergebnisse	17
4.1 Schätzung der Modellparameter	17
4.2 Ergebnisse und ihre Interpretation	19

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	ii
5 Fazit und Ausblick	29
A Risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß	31
Literaturverzeichnis	33

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Eine fondsgebundene Lebensversicherung mit garantierter Ablaufleistung koppelt die Versicherungsleistung an die Performance eines Fonds, gewährt dem Versicherungsnehmer aber zusätzlich eine Absicherung gegen den Wertverlust des Fonds⁴. Aufgrund der anhaltenden Niedrigzinsphase der letzten Jahre haben solche Produkte im Vergleich zu traditionellen Lebensversicherungsprodukten stark an Attraktivität gewonnen. Für die Versicherungsunternehmen sind mit dieser Produktform jedoch neuartige Risiken verbunden. Denn im Vergleich zu den Risiken des konventionellen Lebensversicherungsgeschäftes kann das Verlustrisiko aus den Garantien nicht über eine zunehmende Größe des Bestandes diversifiziert werden. Daher ist es für Versicherungsunternehmen unumgänglich, moderne Absicherungsmethoden anzuwenden, um das Verlustrisiko zu reduzieren. Dass dies mit dynamischen Hedging-Strategien wirksam möglich ist, werden wir in dieser Arbeit zeigen.

1.2 Literaturüberblick

Zur Thematik des Hedgings zur Absicherung von Garantien in Lebensversicherungsverträgen ist bislang nur wenig Literatur vorhanden. Zwar stellen beispielsweise Holler und Klinge in der Versicherungswirtschaft (Heft 11/2006) die Idee des Hedgings und seine Ergebnisse vor. Es fehlt jedoch bislang eine Arbeit, in der neben den Ergebnissen auch die konkrete Vorgehensweise des Hedgings beschrieben wird. Diese

⁴Derartige Produkte werden häufig auch als GMAB-Produkte (GMAB = Guaranteed Minimum Accumulation Benefit) bezeichnet.

Arbeit soll diese Lücke schließen, indem das Hedging Schritt für Schritt an einem Modellvertrag durchgeführt wird⁵.

Da Garantien im Prinzip Optionen darstellen, können viele Erkenntnisse zur Bewertung und zum Hedging von Garantien aus der Optionspreistheorie übernommen werden. Exemplarisch dazu seien die Bücher von Hull (2001), Bingham u. Kiesel (2004) und Björk (2005) genannt.

1.3 Aufbau der Arbeit

Mit dieser Arbeit soll ein Einblick in das Grundkonzept und die Wirkungsweise des dynamischen Hedgings gegeben werden.

Zunächst wird in Kapitel 2 der unseren Betrachtungen zugrunde liegende Versicherungsvertrag und das zugehörige Kapitalmarktmodell eingeführt.

Das Konzept des Delta-Rho-Hedgings und die damit verbundene Methodik wird in Kapitel 3 vorgestellt. Dies beinhaltet neben der Auswahl geeigneter Hedge-Assets auch die Bewertung der Garantieleistung und der Hedge-Assets, die Berechnung der so genannten Greeks Delta und Rho und darauf aufbauend die Bestimmung der optimalen Zusammensetzung des Hedgeportfolios.

Dies bildet die Grundlage, um schließlich in Kapitel 4 das Hedging an einem Fallbeispiel auf Basis simulierter Kapitalmarktdaten konkret durchzuführen und die Ergebnisse zu analysieren. In diesem Rahmen zeigen wir insbesondere auf, wie verschiedene Hedging-Strategien verglichen werden können. Zu diesem Zweck untersuchen wir die quantitativen Auswirkungen einer Hedging-Strategie, die nur die Stochastik im Aktienindex berücksichtigt, nicht aber im Zins (obwohl dieser ebenfalls durch einen stochastischen Prozess beschrieben wird). Die entstehenden Abweichungen geben Aufschluss über das entstehende Risiko, wenn bei Absicherungsmaßnahmen zufällige Schwankungen einzelner Parameter nicht berücksichtigt werden. Diese Methodik kann völlig analog auch auf andere Parameter (wie z. B. die Volatilität) übertragen werden.

⁵Zur besseren Verständlichkeit werden wir uns dabei auf einen einfachen Modellvertrag und die für das Hedging wesentlichen Aspekte konzentrieren. Genauer werden wir eine indexgebundene Versicherung auf den Erlebensfall mit garantierter Ablaufleistung betrachten, d.h. wir bilden den der Police zugrundeliegenden Fonds durch einen Aktienindex ab.

Kapitel 2

Modell

2.1 Modellierung des Versicherungsvertrages

Wir betrachten einen Versicherungsvertrag mit fester Laufzeit T , der gegen einen Einmalbeitrag P abgeschlossen wird. Davon wird eine Garantieprämie P_G einbehalten, die in ein Hedgeportfolio zur Absicherung der Garantie investiert wird. Der verbleibende Betrag wird in einen vom Versicherungsnehmer gewählten Aktienindex investiert. In T , d.h. zu Vertragsende, wird entweder der Wert der Indexanteile ausbezahlt oder, falls der Wert der Anteile unter dem Betrag G liegen sollte, die garantierte Leistung G . Denkbar als Garantie ist beispielsweise die Rückerstattung des Einmalbeitrages oder eine Verzinsung des Einmalbeitrages.

Stirbt oder storniert der Versicherungsnehmer jedoch vor Laufzeitende, so wird lediglich der aktuelle Wert der Indexanteile ausbezahlt. Durch diese Art der Vertragsgestaltung spielt es für den Wert der Garantie keine Rolle, ob der Versicherungsnehmer vor Ablauf der Vertragslaufzeit stirbt oder storniert, da kein riskiertes Kapital entsteht. Daher kann auf die Modellierung von Sterbe- und Stornowahrscheinlichkeiten verzichtet werden.

2.2 Modellierung des Finanzmarktes

Der Finanzmarkt wird durch einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit einer Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$, \mathcal{F}_0 f.s. trivial⁶ und $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$, beschrieben.

Wir gehen davon aus, dass der dem Versicherungsvertrag zugrunde liegende Aktienindex einer geometrisch Brownschen Bewegung mit konstanten Koeffizienten μ und

⁶Für jedes $A \in \mathcal{F}_0$ gilt entweder $\mathbb{P}(A) = 0$ oder $\mathbb{P}(A) = 1$.

σ folgt. Dabei wird der Prozess des Aktienindex mit $S(t)$ bezeichnet. Um ein realitätsnahes Modell zu erhalten, sollte auch die Entwicklung der Zinsstruktur stochastisch modelliert werden. Dazu verwenden wir das Cox-Ingersoll-Ross-Modell (CIR-Modell), ein stochastisches Zinsmodell zur Modellierung der Short Rate⁷. Es bietet den Vorteil, dass die Short Rate stets positiv ist. Die Short Rate zum Zeitpunkt t bezeichnen wir mit $r(t)$.

Weiterhin sollte ein realistisches Modell die Korrelation zwischen dem Aktienindex und der Short Rate berücksichtigen. Diese erfassen wir durch die Korrelation der zugrunde liegenden stochastischen Prozesse.

Unter den getroffenen Annahmen genügen die Preisprozesse des Aktienindex und der Short Rate den folgenden stochastischen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} dS(t) &= \mu S(t)dt + \sigma_s S(t) \left(\rho dW_1^{\mathbb{P}}(t) + \sqrt{1 - \rho^2} dW_2^{\mathbb{P}}(t) \right), & S(0) &= S_0, \quad \sigma_s > 0 \\ dr(t) &= \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma_r \sqrt{r(t)} dW_1^{\mathbb{P}}(t), & r(0) &= r_0, \quad \theta, \kappa, \sigma_r > 0, \end{aligned}$$

wobei $W_1^{\mathbb{P}}(t)$ und $W_2^{\mathbb{P}}(t)$ zwei an \mathcal{F}_t adaptierte⁸, unabhängige Brownsche Bewegungen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sind und $\rho \in [-1, 1]$ der Parameter ist, der die Korrelation zwischen $S(t)$ und $r(t)$ steuert⁹.

Als Basisinstrumente werden am Markt der Index und Zerobonds jeder Laufzeit gehandelt. Den Preis eines Zerobonds mit Fälligkeit in T zum Zeitpunkt t bezeichnen wir mit $P(t, T)$.

Zusätzlich ist eine sichere Anlage in Form eines Geldmarktkontos gegeben, dessen Preisprozess $B(t)$ gegeben ist durch

$$B(t) = e^{\int_0^t r(s)ds} \quad \forall t \in [0, T].$$

Weiterhin setzen wir voraus, dass am Markt keine Transaktionskosten auftreten und Handeln zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, T]$ möglich ist. Um das ideale Hedgeportfolio

⁷Die Short Rate gibt den Zinssatz für einen infinitesimalen Zeitraum an und ist eine nicht direkt beobachtbare, sondern eine theoretische Größe. Zur formalen Definition der Short Rate vgl. z.B. [BingKies 04, S. 331].

⁸Ein stochastischer Prozess X_t heißt adaptiert an \mathcal{F}_t , falls die Funktion $\omega \mapsto X_t(\omega)$ mit $\omega \in \Omega$ bezüglich \mathcal{F}_t für alle t messbar ist.

⁹Sind W_1 und W_2 zwei unabhängige Brownsche Bewegungen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, so erhält man mit $W_3(t) := \rho W_1(t) + \sqrt{1 - \rho^2} W_2(t)$ erneut eine Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und es gilt $\text{Corr}(W_1(t), W_3(t)) = \rho$.

bilden zu können, sollten zudem alle am Markt verfügbaren Assets in beliebiger Anzahl gekauft und verkauft werden können.

Zur Bewertung der Instrumente am Markt führen einen Maßwechsel zu einem zu \mathbb{P} äquivalenten risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q} durch¹⁰. Unter einem äquivalenten risikoneutralen Maß erfolgt die Bewertung aller am Kapitalmarkt gegebenen Titel als diskontierter Erwartungswert der zukünftigen Auszahlungen¹¹. [Kurz 97] beschreibt den Maßwechsel folgendermaßen: “Durch die Maßtransformation liegt nicht mehr die mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} formulierte subjektive Einschätzung der Marktteilnehmer der Preisbestimmung zugrunde, stattdessen erfolgt eine risikoneutrale Bewertung“.

Mit dem Girsanov-Theorem¹² lässt sich zeigen, dass in unserem Modell ein zu \mathbb{P} äquivalentes Martingalmaß durch

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp \left(- \left(\int_0^T \lambda_1(s) dW_1^{\mathbb{Q}} + \int_0^T \lambda_2(s) dW_2^{\mathbb{Q}} \right) - \frac{1}{2} \left(\int_0^T \lambda_1^2(s) ds + \int_0^T \lambda_2^2(s) ds \right) \right)$$

$$\text{mit } \lambda_2(s) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left(\frac{\mu - r(s)}{\sigma} - \rho \lambda_1(s) \right)$$

$$\text{und } W_i^{\mathbb{Q}}(t) = W_i^{\mathbb{P}}(t) + \int_0^t \lambda_i(s) ds, \quad i = 1, 2$$

gegeben sind. Der Beweis dazu befindet sich in Anhang A.

Wie zu sehen ist, ist \mathbb{Q} nicht eindeutig bestimmt, sondern hängt von der Wahl von λ_1 , dem sog. Marktpreis des Risikos („market price of risk“) der Zerobonds, ab. Daher sind die Preise der am Markt gehandelten Finanzinstrumente erst mit der Festlegung von λ_1 eindeutig bestimmt. In der Literatur wird dafür häufig $\lambda_1(s) = \lambda \sqrt{r(s)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, vorgeschlagen¹³. Diese Wahl des „market price of risk“ hat keine ökonomischen Gründe, sondern bietet den Vorteil, dass die Dynamiken von $r(t)$ unter \mathbb{Q} erneut die Gestalt des CIR-Modells haben. Wir schließen uns daher dieser Wahl an.

¹⁰Ein risikoneutrales Maß (od. Martingalmaß) \mathbb{Q} ist ein Maß, unter welchem die diskontierten Preisprozesse der Basisinstrumente Martingale sind.

¹¹Zu der risikoneutralen Bewertungsformel vgl. z.B. [Björk 05] S. 137.

¹²Vgl. z.B. [BingKies 04, S. 199].

¹³Vgl. z.B. [BriMer 06, S. 65].

Der Maßwechsel führt zu folgenden \mathbb{Q} -Dynamiken:

$$\begin{aligned} dS(t) &= r(t)S(t)dt + \sigma_s S(t) \left(\rho dW_1^{\mathbb{Q}}(t) + \sqrt{1 - \rho^2} dW_2^{\mathbb{Q}}(t) \right), & S(0) &= S_0, \quad \sigma_s > 0 \\ dr(t) &= \tilde{\kappa}(\tilde{\theta} - r(t))dt + \tilde{\sigma}_r \sqrt{r(t)} dW_1^{\mathbb{Q}}(t), & r(0) &= r_0, \quad \tilde{\theta}, \tilde{\kappa}, \tilde{\sigma}_r > 0, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{\kappa} = \kappa + \lambda\sigma_r$, $\tilde{\theta} = \frac{\kappa\theta}{\kappa + \lambda\sigma_r}$, $\tilde{\sigma}_r = \sigma_r$.

Durch die Spezifikation der Short Rate-Dynamik unter dem risikoneutralen Maß \mathbb{Q} ist die Zinsstruktur, und damit auch der Preis beliebiger Zinsderivate, vollständig bestimmt¹⁴.

Das Kapitalmarktmodell unter \mathbb{P} werden wir ausschließlich zur Simulation von Kapitalmarktszenarien benötigen. Die Bewertung der Garantie und der Hedge-Instrumente erfolgt dagegen unter \mathbb{Q} .

¹⁴Vgl. z.B. [Björk 05] S. 326.

Kapitel 3

Delta-Rho-Hedging

3.1 Grundkonzept

Aufgabe eines Hedgingprogramms ist es, das Risiko aus den Garantien im Portfolio eines Versicherers durch den Aufbau eines geeigneten Hedgeportfolios abzusichern.

Dynamische Hedging-Strategien beruhen auf den sogenannten Greeks. Greeks sind Kennzahlen zur Messung der Sensitivität eines Derivats, abhängig von der Veränderung eines bestimmten Marktfaktors wie Wert des Index, risikoloser Zins, Volatilität des Index oder Restlaufzeit. Wir werden uns in dieser Arbeit auf das Delta- und das Delta-Rho-Hedging beschränken und die Ergebnisse unter diesen beiden Strategien vergleichen. Delta drückt die Sensitivität bezüglich des Preises des Underlyings (Index) aus und Rho misst die Wertveränderung des Derivats bei Änderungen des risikolosen Zinssatzes.

Bei einem Delta-Rho-Hedging wird das Hedgeportfolio so konstruiert, dass Delta und Rho der Garantie zu Delta und Rho des Hedgeportfolios passen. Dadurch ist gewährleistet, dass der Wert des Hedgeportfolios auf kleine Wertveränderungen des Index und des Zinssatzes in ähnlicher Weise reagiert wie der Wert der Garantie. Wird bei der Konstruktion des Hedgeportfolios nur Delta berücksichtigt, so spricht man von Delta-Hedging. Dieses Konzept lässt sich auf das Hedging mit einer beliebigen Anzahl der Greeks übertragen. Zur Vereinfachung werden wir uns in dieser Arbeit jedoch auf Delta- und Delta-Rho-Hedging beschränken.

Die Zusammensetzung des Hedgeportfolios muss regelmäßig überprüft und gegebenenfalls angepasst werden, damit auch nach größeren Marktbewegungen die Garantie wieder „gut gehedgt“ ist¹⁵. In der Praxis üblich ist die wöchentliche Anpassung

¹⁵Aus diesem Grund spricht man von dynamischem Hedging.

des Hedgeportfolios¹⁶. In einem zeitstetigen Modell wie unserem kann eine perfekte Hedging-Strategie nur durch ein kontinuierliches Anpassen des Hedgeportfolios erreicht werden¹⁷. Da jedoch nur zu diskreten Zeitpunkten gehedgt werden kann, wird es nie gelingen, den Wertverlauf der Garantie durch das Hedgeportfolio exakt nachzubilden. Aber selbst wenn ein kontinuierliches Anpassen des Hedgeportfolios möglich wäre, wäre das in der Praxis aufgrund der mit jedem Umschichten des Hedgeportfolios verbundenen Transaktionskosten nicht ratsam.

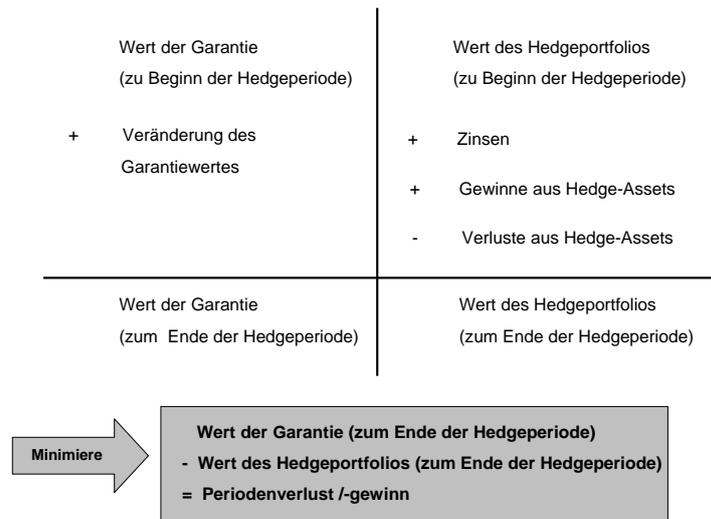


Abbildung 3.1: Ziel des Hedgings¹⁸

Verschiedene Hedging-Strategien lassen sich an der Größe des Hedging-Fehlers in jeder Hedgeperiode vergleichen. Der Hedging-Fehler einer Periode ermittelt sich, wie in Abbildung 3.1 dargestellt ist, als Differenz aus dem Wert der Garantie und dem Wert des Hedgeportfolios zum Ende der Periode. Ist der Hedging-Fehler negativ, so ist das Hedgeportfolio mehr wert als zur Absicherung der Garantie notwendig ist und der Fehler führt zu einem Periodengewinn. Bei einem positiven Hedging-Fehler dagegen kann das Hedgeportfolio die Garantie nicht vollständig absichern und der Hedging-Fehler ist Quelle eines Verlustes. Durch Hedging werden daher Ergebnisschwankungen negativer, aber auch positiver Art ausgeglichen.

¹⁶Vgl. [HolKlinge 06].

¹⁷Vgl. [Traut 06] S. 393.

¹⁸In Anlehnung an [HolKlinge 06].

3.2 Bewertung der Garantie und faire Garantiegebühr

Wie in Abschnitt 2.1 beschrieben, wird im Falle des frühzeitigen Todes des Versicherungsnehmers oder bei Storno lediglich der Wert der zu Vertragsbeginn erworbenen Aktienindex-Anteile ausbezahlt. Der Wert der Garantie zu einem beliebigen Zeitpunkt $t \in [0, T]$, wir wollen ihn mit $V(t)$ bezeichnen, wird daher nur durch die zu zahlende Leistung in T bestimmt. Zu Vertragsbeginn ($t = 0$) wurde der Betrag $P - P_G$ in $\frac{P - P_G}{S(0)}$ Index-Anteile investiert. In T , also zu Vertragsende, haben diese Anteile den Wert $\frac{P - P_G}{S(0)} S(T)$. Falls die Mindestgarantie G diesen Betrag übersteigt, so muss die Differenz an den Versicherungsnehmer ausbezahlt werden. Die Garantieleistung in T beläuft sich daher auf:

$$\max \left\{ G - \frac{P - P_G}{S(0)} S(T), 0 \right\} = \frac{P - P_G}{S(0)} \max \left\{ G \frac{S(0)}{P - P_G} - S(T), 0 \right\}.$$

Diese Auszahlungstruktur lässt erkennen, dass die Garantie eine Put-Option auf den Index mit Fälligkeit in T darstellt.

Wir wollen von einem fairen Vertrag ausgehen. Das ist dann der Fall, wenn die Garantiegebühr dem Wert der Garantie zu Vertragsbeginn entspricht. Zur Bestimmung der Garantiegebühr ist daher folgende Gleichung zu lösen:

$$P_G = V(0) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s) ds} \cdot \max \left\{ G - \frac{P - P_G}{S(0)} S(T), 0 \right\} \middle| \mathcal{F}_0 \right].$$

Diese Fixpunktgleichung kann mit iterativen Verfahren gelöst werden. Jedoch ist uns im Rahmen unseres Finanzmarktmodells keine geschlossene Formel zur Bewertung der Garantie bekannt. Wir wollen dem Aufwand entgehen, den Wert der Garantie zu jedem Bewertungszeitpunkt mit Monte-Carlo-Simulationen bestimmen zu müssen. Deshalb bewerten wir die Garantie trotz unseres Kapitalmarktmodells mit stochastischer Short Rate mit Black-Scholes¹⁹. Das ist in soweit methodisch gerechtfertigt, da in dieser Arbeit die Resultate im Hinblick auf das dynamische Hedging im Vordergrund stehen sollten und das dabei verwendete Bewertungsmodell nur eine untergeordnete Rolle spielt. Zudem hat sich gezeigt, dass der mit der Black-Scholes-Formel berechnete Wert den Wert, der sich in einem Modell mit stochastischem Zins ergibt, gut approximiert²⁰.

¹⁹Die Black-Scholes-Formel gilt für Call-Optionen; mit der Put-Call-Parität lassen sich damit auch Put-Optionen bewerten.

²⁰Vgl. z.B. [LinTan].

Der mit Black-Scholes²¹ approximierter Wert der Garantie zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{P - P_G}{S(0)} \left(S(t) (\Phi(d_1(t, S(t))) - 1) - \frac{S(0)}{P - P_G} G e^{-r(t)(T-t)} (\Phi(d_2(t, S(t))) - 1) \right) \\ &= \frac{P - P_G}{S(0)} S(t) (\Phi(d_1(t, S(t))) - 1) - G e^{-r(t)(T-t)} (\Phi(d_2(t, S(t))) - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mit } d_1(t, S(t)) &= \frac{\log\left(\frac{(P-P_G)S(t)}{GS(0)}\right) + \left(r(t) + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2(t, S(t)) &= d_1(t, S(t)) - \sigma\sqrt{T-t} \end{aligned}$$

3.3 Greeks der Garantie

Als nächster Schritt steht nun die Berechnung von Delta und Rho der Garantie an. Nur wenn diese bekannt sind, kann später das Hedgeportfolio derartig aufgesetzt werden, dass die Greeks der Garantie zu den Greeks des Hedgeportfolios passen.

Wir erinnern uns, dass man unter Delta und Rho der Garantie Maßzahlen für die Veränderungsrate des Garantiewertes bezüglich des Indexwertes S bzw. des risikolosen Zinssatzes r versteht.

Aus mathematischer Sicht handelt es sich bei den Greeks der Garantie um die partiellen Ableitungen des Garantiewertes nach dem jeweiligen Parameter²². Die Formeln zur Berechnung von Delta und Rho einer Put-Option im Rahmen des Black-Scholes-Modells können beispielsweise aus [Hull 01] entnommen werden:

Für das Delta der Garantie Δ_G gilt:

$$\Delta_G(t) = \frac{\partial V(t)}{\partial S} = -\frac{P - P_G}{S(0)} \Phi(-d_1(t, S(t)))$$

Das Rho der Garantie ρ_G ist gegeben durch:

$$\rho_G(t) = \frac{\partial V(t)}{\partial r} = -G(T-t) e^{-r(t)(T-t)} \Phi(-d_2(t, S(t)))$$

²¹Zur Black-Scholes-Formel vgl. z.B. [BingKies 04] S. 251.

²²Vgl. [Hull 01] S.440.

3.4 Wahl der Hedge-Assets

Zunächst muss entschieden werden, welche Assets zum Hedgen verwendet werden sollen. Dabei müssen für Delta und Rho getrennt passende Hedge Assets ausgewählt werden, da im Normalfall kein Finanzderivat am Markt verfügbar ist, bei dem sowohl Delta als auch Rho zu den jeweiligen Greeks der Garantie passen²³.

Die Laufzeiten von Derivaten sind in der Regel meistens begrenzt auf maximal 5 Jahre. Die Überbrückung der verschiedenen Laufzeiten zwischen Garantie und Hedge-Assets muss daher durch den periodischen Verkauf der Finanzinstrumente erfolgen²⁴. Zum Delta-Hedgen kommen Index-Optionen oder Index-Futurekontrakte in Frage. Zur Absicherung des Zinsänderungsrisikos bieten sich Zerobonds, Swaps oder Zins-Futures an.

Als Hedge-Assets für Delta entscheiden wir uns für Index-Futures, für Rho setzen wir einperiodische Swaps, sogenannte Forward Rate Agreements (FRA) ein. Beide Assets bieten den Vorteil, dass mit ihrem Abschluss, zumindest solange Gebühren und Sicherheitsleistungen (Margins) außer Acht gelassen werden, zunächst keine Kosten verbunden sind.

Wir nehmen an, dass zu jedem Hedge-Zeitpunkt Future- und FRA-Kontrakte mit Fälligkeit zum nächsten Hedgetermin am Markt erworben werden können²⁵. Nach Ablauf einer Hedgeperiode werden die Future-Kontrakte und die FRA-Kontrakte aus dem Hedgeportfolio beglichen und das Hedgeportfolio neu aufgesetzt.

3.5 Reservekonto

Die Abrechnung der Gewinne und Verluste, die beim Umschichten des Hedgeportfolios entstehen, erfolgt über ein eigens dafür eingerichtetes Konto, das wir Reservekonto nennen. Zu Vertragsbeginn wird die Garantiegebühr auf dem Reservekonto gutgeschrieben. Die Verzinsung des Kontos erfolgt mit dem jeweils gültigen Zinssatz des Geldmarktkontos. Das ist auch dann der Fall, wenn das Reservekonto negative Werte annimmt. Dann sind die Zinsen des Geldmarktkontos als Kreditzinsen zu verstehen. Sprechen wir in Zukunft von Hedgeportfolio, so ist damit die Summe aus Reservekonto und aktuell gehaltener Hedge-Assets gemeint.

Seien $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T$ die Zeitpunkte, zu denen eine Anpassung

²³Vgl. [HolKlinge 06]

²⁴Vgl. [HolKlinge 06]

²⁵Für den DAX-Future z.B. gibt es an der EUREX tatsächlich nur 4 Verfallstage, und zwar jeweils den dritten Freitag im März, Juni, September und Dezember.

des Hedgeportfolios vorgenommen wird. Mit $W^-(t_i)$ bezeichnen wir den Wert des Reservekontos zum Zeitpunkt t_i vor Umschichten der Hedge-Assets, mit $W^+(t_i)$ den Wert nach Umschichten:

$$\begin{aligned} i = 0 : \quad W^-(t_i) &= W^+(t_i) = P_G \\ i > 0 : \quad W^-(t_i) &= W^+(t_{i-1}) \cdot \frac{B(t_i)}{B(t_{i-1})} \\ W^+(t_i) &= W^-(t_i) + \text{Gewinn/Verlust aus Hedge-Assets} \end{aligned}$$

Beim Umschichten der Hedge-Assets wird der Gewinn/Verlust, der dabei entsteht auf dem Reservekonto gutgeschrieben. Gleichzeitig verursachen die neu erworbenen Future- und FRA-Kontrakte, wie in Abschnitt 3.4 bereits beschrieben, keine Kosten und haben damit den Wert 0. Es wird also weder zusätzliches Kapital zu- noch abgeführt, sondern lediglich zwischen Reservekonto und Hedge-Assets ausgetauscht.

3.6 Bewertung der Hedge-Assets

Wie bei der Einführung des Kapitalmarktmodells bereits erläutert, erfolgt die Bewertung aller Assets am Markt als diskontierter Erwartungswert der zukünftigen Auszahlungen unter dem risikoneutralen Maß \mathbb{Q} .

Wert eines Aktienindex-Futures

Ein Future-Kontrakt mit Fälligkeit in $T_i = t_{i+1}$, der in t_i zum Ausübungspreis K_i abgeschlossen wird, verursacht in T_i eine Auszahlung in Höhe von $S(T_i) - K_i$. Zum Zeitpunkt $t \in [t_i, T_i]$ hat der Future-Kontrakt daher den folgenden Wert:

$$\begin{aligned} F(t, T_i) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[(S(T_i) - K_i) e^{-\int_t^{T_i} r(s) ds} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[S(T_i) e^{-\int_t^{T_i} r(s) ds} \middle| \mathcal{F}_t \right] - K_i \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^{T_i} r(s) ds} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= S(t) - K_i \cdot P(t, T_i) \end{aligned}$$

Im letzten Schritt der Berechnung wurde ausgenutzt, dass der diskontierte Preisprozess $\tilde{S}(t) = e^{-\int_0^t r(s) ds} S(t)$ ein Martingal unter dem Martingalmaß \mathbb{Q} ist²⁶.

²⁶Vgl. [Björk 05, S. 391].

Wir wollen davon ausgehen, dass der Ausübungspreis K_i dem fairen Kurs des Futures entspricht. Der faire Kurs eines Futures ist der Ausübungspreis, für den der Future bei Aufsetzen des Kontraktes in t_i den Wert 0 hat:

$$F(t_i, T_i) = 0 \Leftrightarrow K_i = \frac{S(t_i)}{P(t_i, T_i)}.$$

Wert eines FRA-Kontraktes

Bei einem zum Zeitpunkt t_i abgeschlossenen FRA-Kontrakt²⁷ mit Ausübungszeitpunkt Z_i , $t_i < Z_i < t_{i+1}$, und Fälligkeit in $T_i = t_{i+1}$ wird zum Zeitpunkt T_i eine fixe Auszahlung auf Basis eines konstanten Zinssatzes R_i gegen eine variable Auszahlung basierend auf der (simply compounded) Spot Rate $L(Z_i, T_i)$ getauscht. Die Spot Rate für den Zeitraum $[Z_i, T_i]$ ist dabei folgendermaßen definiert:

$$L(Z_i, T_i) = \frac{1 - P(Z_i, T_i)}{\tau(Z_i, T_i)P(Z_i, T_i)},$$

wobei $\tau(Z_i, T_i)$ die Länge des Zeitintervalls $[Z_i, T_i]$ in Jahren je nach gewählter Day-Count-Convention angibt²⁸. Wir verwenden die Day-Count-Convention $\frac{30}{360}$, bei der angenommen wird, dass jeder Monat im Jahr 30 Tage und das Jahr 360 Tage hat²⁹.

Die Auszahlung in T_i beträgt daher

$$N \cdot \tau(Z_i, T_i) \cdot (R_i - L(Z_i, T_i)),$$

wobei N der Nennwert des Kontraktes ist.

Mit der risikoneutralen Bewertungsformel erhält man schließlich den Wert des FRA-Kontraktes zum Zeitpunkt t_i :

$$\begin{aligned} FRA(t_i, Z_i, T_i) &= N \cdot \tau(Z_i, T_i) \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[(R_i - L(Z_i, T_i)) e^{-\int_{t_i}^{T_i} r(s) ds} \middle| \mathcal{F}_{t_i} \right] \\ &= N \cdot \tau(Z_i, T_i) \left(R_i \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_{t_i}^{T_i} r(s) ds} \middle| \mathcal{F}_{t_i} \right] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[L(Z_i, T_i) e^{-\int_{t_i}^{T_i} r(s) ds} \middle| \mathcal{F}_{t_i} \right] \right) \\ &= N \cdot \tau(Z_i, T_i) \left(R_i \cdot P(t_i, T_i) - \frac{1}{\tau(Z_i, T_i)} [P(t_i, Z_i) - P(t_i, T_i)] \right) \\ &= N \cdot [P(t_i, T_i) \tau(Z_i, T_i) R_i - P(t_i, Z_i) + P(t_i, T_i)] \end{aligned}$$

²⁷Zu FRA-Kontrakten und ihrer Bewertung vgl. auch [BriMer 06, S. 11-13].

²⁸Unter der Day-Count-Convention versteht man das Maß, mit welchem die Länge eines Zeitintervalls bestimmt wird.

²⁹Vgl. [BriMer 06, S. 5].

Die Gleichheit $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[L(Z_i, T_i) \cdot e^{-\int_{t_i}^{T_i} r(s) ds} | \mathcal{F}_{t_i} \right] = \frac{1}{\tau(Z_i, T_i)} [P(t_i, Z_i) - P(t_i, T_i)]$ wird beispielsweise in [BriMer 06, S.38] bewiesen.

Damit der FRA-Kontrakt zum Zeitpunkt t_i fair bewertet ist, muss sein Wert zu diesem Zeitpunkt gleich 0 sein. Gesucht ist somit dasjenige R_i , welches den Wert des FRA-Kontraktes in t_i verschwinden lässt. Der daraus gewonnene Zins wird Forward Rate genannt. Die Forward Rate zum Zeitpunkt t_i mit Ausübungszeitpunkt Z_i und Fälligkeitstermin T_i ist somit gegeben durch

$$FRA(t_i, Z_i, T_i) = 0 \Leftrightarrow R_i = \frac{1}{\tau(Z_i, T_i)} \left(\frac{P(t_i, Z_i)}{P(t_i, T_i)} - 1 \right).$$

Die Zerobond-Preise, die sich im Rahmen eines CIR-Modells ergeben, können wir [BriMer 06, S.66] entnehmen:

$$P(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} | \mathcal{F}_t \right] = A(t, T) e^{-B(t, T)r(t)},$$

wobei

$$\begin{aligned} A(t, T) &= \left[\frac{2he^{(\tilde{\kappa}+h)(T-t)/2}}{2h + (\tilde{\kappa} + h)(e^{(T-t)h} - 1)} \right]^{2\tilde{\kappa}\tilde{\theta}/\tilde{\sigma}^2} \\ B(t, T) &= \frac{2(e^{(T-t)h} - 1)}{2h + (\tilde{\kappa} + h)(e^{(T-t)h} - 1)} \\ h &= \sqrt{\tilde{\kappa}^2 + 2\tilde{\sigma}^2}. \end{aligned}$$

3.7 Greeks der Hedge-Assets

Zur Anpassung des Hedgeportfolios müssen Delta und Rho der Hedge-Assets zu den Hedge-Zeitpunkten t_i , $i=1, \dots, n$ bekannt sein.

Analog zur Garantie berechnen sich auch die Greeks beliebiger Assets als partielle Ableitungen ihres Wertes nach dem jeweiligen Parameter.

Delta eines Aktienindex-Futures:

$$\Delta_F(t_i) = \frac{\partial F(t_i, T_i)}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S} [S(t_i) - K_i \cdot P(t_i, T_i)] = 1$$

Das Delta eines Aktienindex-Futures ist konstant 1, da sein Wert linear in dem Wert des zugrunde liegenden Index steigt.

Rho eines Aktienindex-Futures:

$$\begin{aligned}\rho_F(t_i) &= \frac{\partial F(t_i, T_i)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} [S(t_i) - K_i \cdot P(t_i, T_i)] \\ &= -K_i \cdot \frac{\partial P(t_i, T_i)}{\partial r} = K_i \cdot B(t_i, T_i) A(t_i, T_i) e^{-B(t_i, T_i)r(t_i)}\end{aligned}$$

Da mit steigender Short Rate der Preis $P(t_i, T_i)$ sinkt, ist das Rho des Aktienindex-Futures positiv.

Delta eines FRA-Kontraktes:

$$\Delta_{FRA}(t_i) = \frac{\partial FRA(t_i, Z_i, T_i)}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S} [N (P(t_i, T_i)\tau(Z_i, T_i)R_i - P(t_i, Z_i) + P(t_i, T_i))] = 0$$

Der Wert eines FRA-Kontraktes entwickelt sich unabhängig von dem Kurs des Index und somit ist sein Delta stets null.

Rho eines FRA-Kontraktes:

$$\begin{aligned}\rho_{FRA}(t_i) &= \frac{\partial FRA(t_i, Z_i, T_i)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} [N (P(t_i, T_i)\tau(Z_i, T_i)R_i - P(t_i, Z_i) + P(t_i, T_i))] \\ &= N \left(\frac{\partial P(t_i, T_i)}{\partial r} \tau(Z_i, T_i) R_i - \frac{\partial P(t_i, Z_i)}{\partial r} + \frac{\partial P(t_i, T_i)}{\partial r} \right)\end{aligned}$$

wobei

$$\frac{\partial P(t, \tau)}{\partial r} = -B(t, \tau) A(t, \tau) e^{-B(t, \tau)r(t)} \quad \text{für } t < \tau.$$

3.8 Zusammensetzung des Hedgeportfolios

Da wir nun in der Lage sind zu jedem der Anpassungszeitpunkte Delta und Rho der Garantie und der Hedge-Assets zu berechnen, können wir sowohl unter einer Delta-Hedging als auch unter einer Delta-Rho-Hedging-Strategie die optimale Zusammensetzung der Hedge-Assets im Hedgeportfolios bestimmen. Aufgabe ist es, zu

jedem Zeitpunkt t_i die Zusammensetzung des Hedgeportfolios so zu bestimmen, dass Delta bzw. Delta und Rho der Garantie und der Hedge-Assets übereinstimmen.

Delta-Hedging:

Angenommen es werden zum Zeitpunkt t_i genau $x_1(t_i)$ Future-Positionen gehalten. Das gemeinsame Delta aller Future-Kontrakte ist dann gegeben durch:

$$\frac{\partial}{\partial S} [x_1(t_i) \cdot F(t_i, T_i)] = x_1(t_i) \cdot \Delta_F(t_i)$$

Die Anzahl der Futures ist optimal, wenn gilt:

$$x_1(t_i) \cdot \Delta_F(t_i) = \Delta_G(t_i) \Leftrightarrow x_1(t_i) = \frac{\Delta_G(t_i)}{\Delta_F(t_i)}$$

Delta-Rho-Hedging

Wir wollen annehmen, dass zum Zeitpunkt t_i insgesamt $x_1(t_i)$ Future-Positionen und $x_2(t_i)$ FRA-Kontrakte gehalten werden. Das gemeinsame Delta der Hedge-Assets berechnet sich dann folgendermaßen:

$$\frac{\partial}{\partial S} [x_1(t_i) \cdot F(t_i, T_i) + x_2(t_i) \cdot FRA(t_i, Z_i, T_i)] = x_1(t_i) \cdot \Delta_F(t_i) + x_2(t_i) \cdot \Delta_{FRA}(t_i)$$

und analog erhalten wir das gemeinsame Rho der Hedge-Assets:

$$\frac{\partial}{\partial r} [x_1(t_i) \cdot F(t_i, T_i) + x_2(t_i) \cdot FRA(t_i, Z_i, T_i)] = x_1(t_i) \cdot \rho_F(t_i) + x_2(t_i) \cdot \rho_{FRA}(t_i)$$

Zur Bestimmung der Zusammensetzung muss daher lediglich das folgende Gleichungssystem gelöst werden:

$$\begin{aligned} x_1(t_i) \cdot \Delta_F(t_i) + x_2(t_i) \cdot \Delta_{FRA}(t_i) &= \Delta_G(t_i) \\ x_1(t_i) \cdot \rho_F(t_i) + x_2(t_i) \cdot \rho_{FRA}(t_i) &= \rho_G(t_i) \end{aligned}$$

Wegen $\Delta_{FRA}(t_i) = 0$ lässt sich die eindeutige Lösung dieses Gleichungssystems sofort angeben:

$$x_1(t_i) = \frac{\Delta_G(t_i)}{\Delta_F(t_i)}, \quad x_2(t_i) = \frac{\rho_G(t_i) - x_1(t_i)\rho_F(t_i)}{\rho_{FRA}(t_i)}$$

Kapitel 4

Simulationen und ihre Ergebnisse

Mit der Methodik aus Kapitel 3 werden wir nun für einen konkreten Vertrag ein dynamisches Hedging durchführen. Wir werden dazu Kapitalmarktszenarien entsprechend dem in Kapitel 2 spezifizierten Kapitalmarktmodell erzeugen und unter diesen Szenarien beobachten, inwieweit durch das Hedging das aus der Garantie resultierende Finanzmarktrisiko kompensiert werden kann.

Der Vertrag sei wie folgt gestaltet:

- Vertragsbeginn: 1.11.2008
- Index: DAX
- Laufzeit: $T = 10$ Jahre
- Einmalprämie: $P = 50.000$ EUR
- Garantie: $G = 50.000$ EUR

Wird die Garantiegebühr für diesen Vertrag wie in Abschnitt 3.2 beschrieben berechnet, so ergibt sich $P_G = 7.899$ €. In den DAX werden daher 42.101 € investiert.

4.1 Schätzung der Modellparameter

Um möglichst realistische Kapitalmarktszenarien zu generieren, schätzen wir die Parameter der DAX- und die Short Rate-Dynamik auf der Grundlage historischer

Marktdaten. Als Datenquelle dient der Zeitreihenservice der Deutschen Bundesbank³⁰.

Zur Schätzung des Drifts μ und der Volatilität σ der DAX-Dynamik verwenden wir Daten der Monatsendstände des DAX der letzten 20 Jahre (Oktober 1988 bis Oktober 2008). Wir nutzen folgende Verteilungseigenschaft von $S(t)$ aus³¹:

$$\ln \left(\frac{S(t + \Delta t)}{S(t)} \right) \sim N \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \right) \Delta t, \sigma_s^2 \Delta t \right)$$

und erhalten Schätzer für μ und σ_s durch Vergleich der tatsächlichen Momente der Verteilung mit den empirischen Momenten.

Bei der Schätzung der CIR-Parameter orientieren wir uns an der Vorgehensweise in [FMW 03]. Datengrundlage bilden die Monatsdurchschnitte des Geldmarktsatzes für Tagesgeld am Frankfurter Bankplatz der letzten 20 Jahre.

Um schließlich zu den Parametern unter \mathbb{Q} zu gelangen, genügt es den Parameter $\tilde{\kappa}$ zu bestimmen, denn dann ergeben sich $\tilde{\theta}$ und $\tilde{\sigma}_r$ durch den Zusammenhang $\tilde{\theta} = \frac{\kappa \theta}{\tilde{\kappa}}$ und $\tilde{\sigma}_r = \sigma_r$. Einen Schätzer für $\tilde{\kappa}$ erhält man durch Anpassung der theoretischen an die aktuelle Zinsstruktur.

Mit den soeben genannten Schätzmethode gelangen wir zu folgenden Schätzwerten für die Parameter unseres Finanzmarktmodells:

μ	σ_s	κ	θ	σ_r	$\tilde{\kappa}$	$\tilde{\theta}$	$\tilde{\sigma}_r$
0,09	0,22	0,047	0,035	0,01	0,037	0,044	0,01

Tabelle 4.1: Parameter des Finanzmarktmodells

Für S_0 und r_0 stehen die realen Werte vom 1.11.2008 zur Verfügung. Der DAX stand bei $S_0=4987,97$ Punkten und der Geldmarktsatz für Tagesgeld betrug $r_0=0,0325$.

Zur Schätzung der Korrelation diskretisieren wird die stochastischen Differentialgleichungen des Kapitalmarktmodells³²:

$$\begin{aligned} S(t + \Delta t) &= S(t) + S(t) (\mu \Delta t + \sigma_s \Delta W_3(t)) \\ r(t + \Delta t) &= r(t) + \kappa (\theta - r(t)) \Delta t + \sigma_r \sqrt{r(t)} \Delta W_1(t) \end{aligned}$$

mit $\Delta W_3(t) = \rho \Delta W_1(t) + \sqrt{1 - \rho^2} \Delta W_2(t)$, $\Delta W_i(t) = W_i(t + \Delta t) - W_i(t)$, $i=1,2,3$.

³⁰Download unter <http://www.bundesbank.de/statistik>.

³¹Vgl. z.B. [Hull 01] S. 339.

³²Es ist das Kapitalmarktmodell unter dem „real world“-Maß \mathbb{P} gemeint; zur Vereinfachung schreiben wir $W_i(t)$ statt $W_i^{\mathbb{P}}(t)$, $i=1,2,3$.

Aus den Eigenschaften Brownscher Bewegungen folgt der Zusammenhang

$$\text{Cov}(\Delta W_1(t), \Delta W_3(t)) = \rho \cdot \Delta t \quad \text{bzw.} \quad \rho = \frac{\text{Cov}(\Delta W_1(t), \Delta W_3(t))}{\Delta t}.$$

Um ρ zu schätzen genügt es daher einen Schätzer für $\text{Cov}(\Delta W_1(t), \Delta W_3(t))$ zu bestimmen. Die dazu benötigten Realisierungen von $\Delta W_1(t)$ und $\Delta W_3(t)$ lassen aus den Daten für $S(t)$ und $r(t)$ und den bereits geschätzten Parametern durch Umformen der diskretisierten Gleichungen gewinnen:

$$\begin{aligned} \Delta W_3(t) &= \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{S(t)\sigma_s} - \frac{\mu\Delta t}{\sigma_s} \\ \Delta W_1(t) &= \frac{r(t + \Delta t) - r(t) - \kappa(\theta - r(t))\Delta t}{\sigma_r\sqrt{r(t)}} \end{aligned}$$

Unter Verwendung der empirischen Kovarianz als Schätzer für $\text{Cov}(\Delta W_1(t), \Delta W_3(t))$ erhalten wir den Schätzwert -0.0018. Da die Daten in monatlichem Abstand vorliegen, ist $\Delta t = \frac{1}{12}$. Damit ist ein Schätzwert für ρ gegeben durch $\frac{0.00219}{\frac{1}{12}} = -0.0216$.

Damit haben wir alle zur Simulation benötigten Parametern geschätzt. Während wir zur Simulation der Zinsszenarien auf die diskretisierte Form des CIR-Modells zurückgreifen, können die Indexkursszenarien exakt simuliert werden, denn die stochastische Differentialgleichung

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma_s S(t)dW(t)$$

besitzt die eindeutige Lösung³³ $S(t) = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma_s^2}{2})t + \sigma_s W(t)}$.

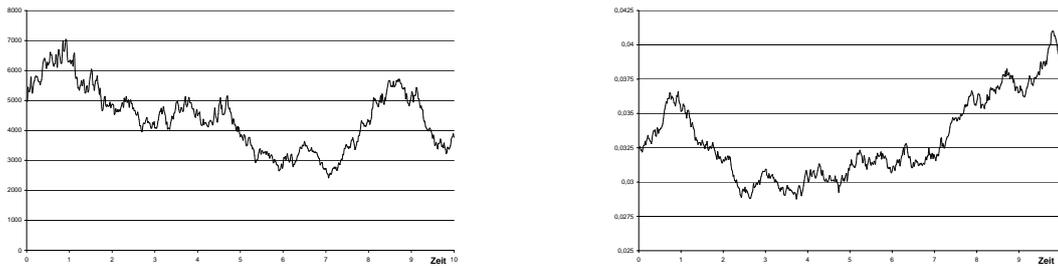
4.2 Ergebnisse und ihre Interpretation

Die Anpassung des Hedgeportfolios wird in wöchentlichen Abständen vorgenommen. Wir wollen davon ausgehen, dass ein Jahr aus 360 Tage mit 12 Monaten à 30 Tagen besteht. Unter einer Woche wird ein Zeitraum von 6 Tagen verstanden. Insgesamt wird das Hedgeportfolio über die 10jährige Vertragslaufzeit daher 600 mal angepasst, wobei der Abstand zwischen den einzelnen Hedgezeitpunkten $t_{i+1} - t_i = \frac{1}{60}$ beträgt. Zum Delta-Hedging werden DAX-Futures mit Laufzeit von einer Hedgeperiode, d.h. einer Woche eingesetzt, von denen wir annehmen, dass sie fair bewertet sind. Wird neben Delta auch Rho gehedgt, so wird das Hedgeportfolio um einwöchige FRA-Kontrakte mit einem Nennwert von 1.000€ ergänzt, bei denen wir ebenfalls von

³³Vgl. z.B. [BingKies 04] S.197.

einer fairen Bewertung ausgehen. Die Differenz zwischen Fälligkeitszeitpunkt und Ausübungszeitpunkt der FRA-Kontrakte betrage ein Tag, durch die getroffenen Annahmen bedeutet das $T_i - Z_i = \frac{1}{360} \forall i = 1, \dots, 600$.

Zunächst untersuchen wir die Wirkung des Hedgings unter zwei ausgewählten Kapitalmarktszenarien.



(a) DAX

(b) Short Rate

Abbildung 4.1: Szenario 1 - DAX und Short Rate

Aufgrund des Kursverfalls des DAX zum Ende der 10-jährigen Laufzeit beläuft sich der Wert der zu Beginn zum Wert von 42.101 € erworbenen DAX-Anteile zu Vertragsende nur noch auf 31.843 €. Dem Versicherungsnehmer wurde jedoch eine garantierte Versicherungsleistung in Höhe von 50.000 € zugesichert. Daher muss der Differenzbetrag von 18.157 € an ihn ausbezahlt werden. Zur Deckung dieses Betrages steht jedoch, falls kein Hedging durchgeführt wird, nur die über 10 Jahre verzinste Garantiegebühr zur Verfügung, die unter diesem Szenario 10.992 € beträgt. Somit ergibt sich ohne Hedging zum Ende der letzten Hedgeperiode ein Verlust von 7.165 €.

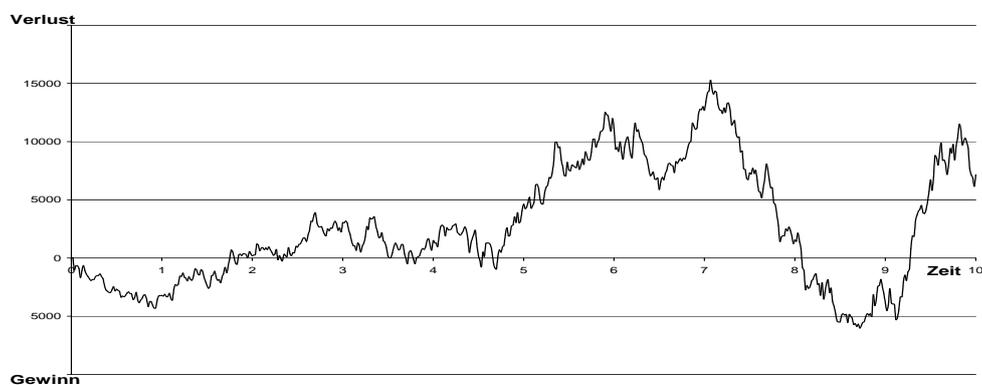


Abbildung 4.2: Szenario 1 - Periodenverluste/-gewinne ohne Hedging

Abbildung 4.2 zeigt für jede Hedgeperiode den Verlust/Gewinn, der sich ohne Hedging ergibt. Der Verlust/Gewinn ermittelt sich dabei jeweils als Differenz aus dem Wert der Garantie und der mit dem Geldmarktzins fortgeschriebenen Garantiegebühr zum Ende der Periode. Wie zu sehen ist, unterliegen die Periodenverluste/-gewinne, wenn nicht gehedgt wird, großen Schwankungen.

Beispielhaft für alle Anpassungszeitpunkte greifen wir uns den Zeitpunkt $t=5$ heraus, um den in Kapitel 3 in der Theorie beschriebenen Ablauf des dynamischen Delta- bzw. Delta-Rho-Hedgings an diesem konkreten Beispiel zu erläutern. Zu diesem Zeitpunkt liegt die folgende Ausgangssituation vor:

Zu Beginn der Hedgeperiode vor einer Woche, also in $t = 4,98\bar{3}$ ($=4\frac{59}{60}$), wurden unter Delta-Hedging 5,16 Future-Kontrakte short eingegangen, d.h es wurden 5,16 Future-Kontrakte verkauft. Unter der Delta-Rho-Hedging-Strategie wurden zusätzlich 60.441,78 FRA-Kontrakte gekauft. Das Reservekonto stand unter Delta-Hedging bei 12.572 € und unter Delta-Rho-Hedging bei 12.989 €.

In $t = 5$ hat sich der Wert des Reservekontos durch die Verzinsung auf 12.578 € unter Delta-Hedging und 12.996 € unter Delta-Rho-Hedging erhöht. Da der DAX in unserem Beispiel innerhalb einer Woche von 3.912 Punkten in $t = 4,98\bar{3}$ auf 3.784 Punkte in $t = 5$ gesunken ist, führen die Futures, die wir short eingegangen waren, bei Fälligkeit in $t=5$ zu einem Gewinn, der für alle Future-Kontrakte zusammen 670 € beträgt. Die Short Rate ist nach Ablauf einer Woche von 0,0309 auf 0,0313 angestiegen. Die FRA-Kontrakte verursachen dadurch einen Verlust von insgesamt 49 €. Der Wert des Hedgeportfolios, der sich als Summe aus dem Wert des Reservekontos und dem Wert der Hedge-Assets ergibt, beläuft sich daher nun auf 13.248 € unter Delta-Hedging und auf 13.617 € unter Delta-Rho-Hedging. Die Garantie ist aktuell 13.873 € wert. Dadurch ergibt sich in dieser Hedgeperiode ein Verlust von 625 € beim Delta-Hedging und 256 € beim Delta-Rho-Hedging.

Die neue Zusammensetzung des Hedgeportfolios bestimmen wir, indem wir zunächst Delta und Rho der Garantie und der Hedge-Assets berechnen, wobei sich die folgenden Werte ergeben: $\Delta_G(5) = -5,37$, $\rho_G(5) = -170.900,03$, $\Delta_F(5) = 1$, $\rho_F(5) = 63,04$, $\Delta_{FRA}(5) = 0$ und $\rho_{FRA}(5) = -2,77$. Die optimale Zusammensetzung des Hedgeportfolios besteht daher aus³⁴ $x_1(5) = \frac{\Delta_G(5)}{\Delta_F(5)} = -5,37$ DAX-Futures, d.h. 5,37 DAX-Futures short, und $x_2(5) = \frac{\rho_G(5) - x_1(5)\rho_F(5)}{\rho_{FRA}(5)} = 61.574,55$ FRA-Kontrakten, d.h. 61.574,55 FRA-Kontrakten long.

Derselbe Ablauf wiederholt sich zu den anderen Hedgezeitpunkten.

³⁴Vgl. dazu die Formeln aus Abschnitt 3.8.

Abbildung 4.3 zeigt die Zusammensetzung des Hedgeportfolios im Zeitverlauf:

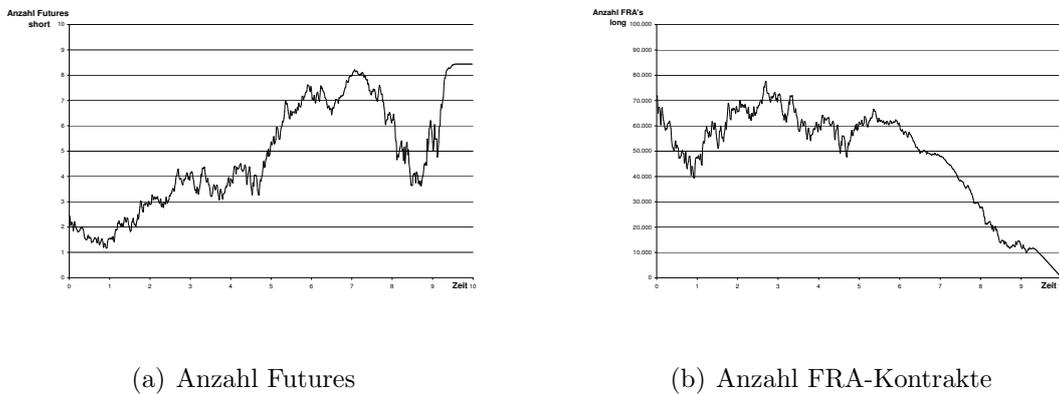


Abbildung 4.3: Szenario 1 - Zusammensetzung des Hedgeportfolios

Die DAX-Futures im Hedgeportfolio werden immer short gehalten, da der Wert der Garantie bei steigendem DAX fällt ($\Delta_G < 0$), während der Wert eines DAX-Futures, der long eingegangen wird, mit steigendem DAX linear wächst ($\Delta_F = 1$). Die Anzahl der DAX-Futures im Hedgeportfolio verhält sich dabei entgegengesetzt zur Entwicklung des DAX. Steigt der DAX, so verliert die Garantie an Wert und es müssen weniger DAX-Futures zur Absicherung der Garantie gehalten werden.

Die Anzahl der FRA-Kontrakte im Hedgeportfolio ist zu Vertragsbeginn sehr hoch, da das Rho eines FRA-Kontraktes im Vergleich zu dem Rho der Garantie sehr klein ist. Im Zeitverlauf entwickelt sich die Anzahl der FRA-Kontrakte im Hedgeportfolio entgegengesetzt zum Verlauf der Short Rate. Gegen Ende der Vertragslaufzeit nimmt die Anzahl der FRA-Kontrakte im Hedgeportfolio jedoch kontinuierlich ab, unabhängig davon, wie sich die Short Rate entwickelt.

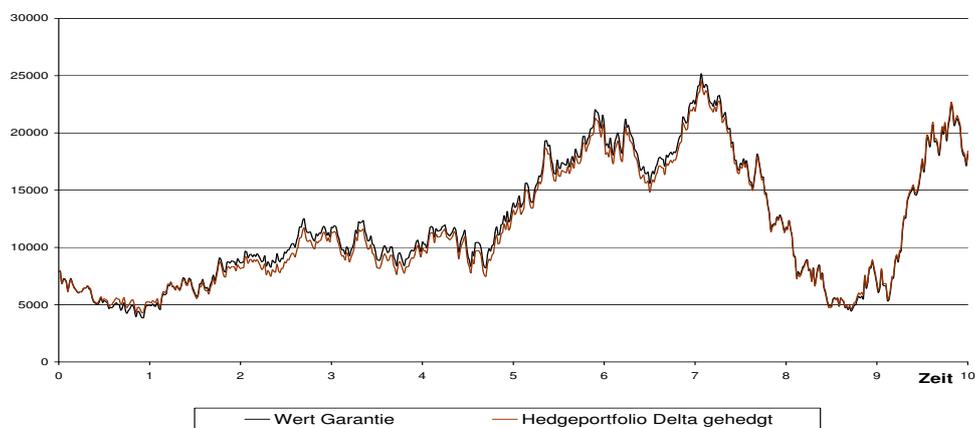


Abbildung 4.4: Szenario 1 - Hedgeportfolio Delta gehedgt

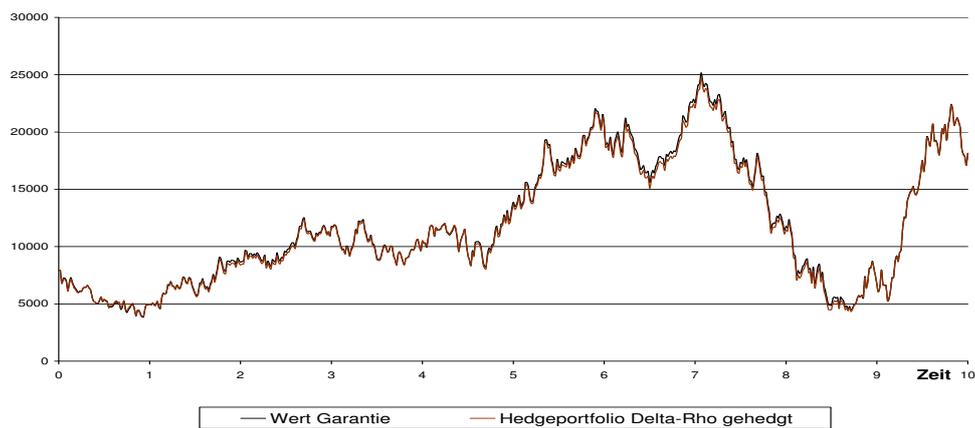


Abbildung 4.5: Szenario 1 - Hedgeportfolio Delta-Rho gehedgt

Die Abbildungen 4.4 und 4.5 zeigen einen Vergleich zwischen dem Wertverlauf der Garantie und des Hedgeportfolios unter der jeweiligen Hedging-Strategie. Wie zu sehen ist, gelingt es unter beiden Strategien relativ gut, den Wertverlauf der Garantie nachzubilden. Erwartungsgemäß liefert aber das Delta-Rho-Hedging das etwas bessere Ergebnis.

Das Verhalten der Garantie und der Hedgeportfolios führt zur folgenden Entwicklung der Periodenverluste/-gewinne über die Laufzeit:

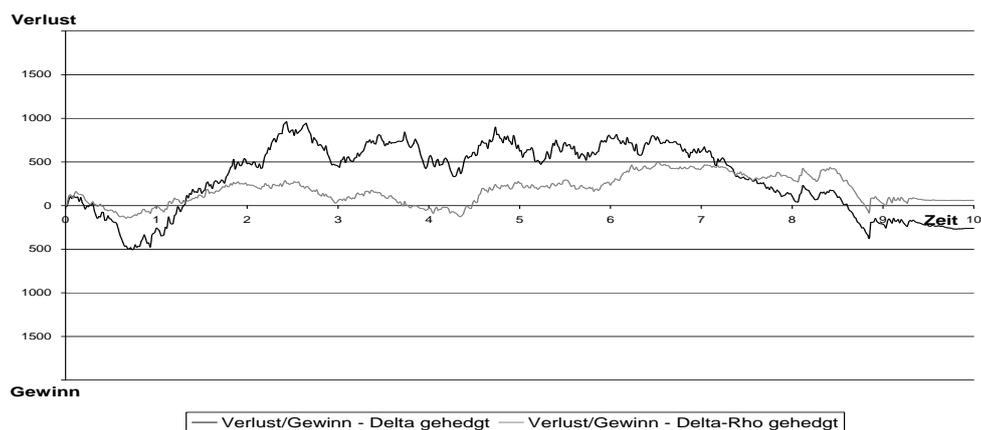


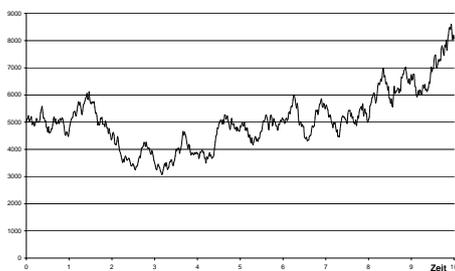
Abbildung 4.6: Szenario 1 - Periodenverluste/-gewinne nach Hedging

Abbildung 4.6 zeigt, dass durch Hedging die Ergebnisschwankungen stark redu-

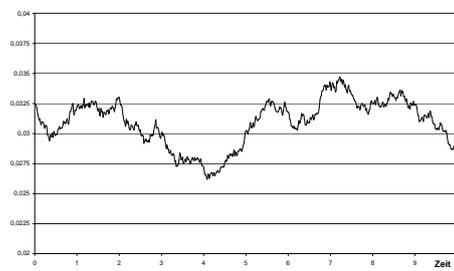
ziert werden können. Variierte der Verlust ohne Hedging zwischen -6.000 € ³⁵ und 15.000 € , so liegen die Periodenverluste mit Delta-Rho-Hedging im Bereich von -150 € und 500 € . Wird nur das Kursänderungsrisiko abgesichert (Delta-Hedging), so bewegen sich die Verluste zwischen -500 € und 1.000 € .

Die Entwicklung der Periodenverluste/-gewinne und die damit verbundenen Ergebnisschwankungen sind zwar ein Maß dafür, wie gut der Wertverlauf der Garantie durch das Hedgeportfolio nachgebildet wird, entscheidend ist jedoch die Höhe des Verlusts/Gewinns zum Ende der letzten Hedgeperiode, denn nur dieser wird tatsächlich realisiert. Während der Verlust zum Ende der letzten Hedgeperiode ohne Hedging bei 7.165 € lag, kann er durch Delta-Rho-Hedging auf 60 € reduziert werden. Unter Delta-Hedging tritt dagegen sogar ein Gewinn in Höhe von 261 € auf. Das bessere Ergebnis nach Delta-Hedging liegt darin begründet, dass der Hedging-Fehler, der durch Vernachlässigung des Zinsänderungsrisikos entsteht, unter diesem Szenario positiver Art ist, also zu einem Gewinn führt.

Dieses erste Szenario hat verdeutlicht, wie riskant es für ein Versicherungsunternehmen sein kann, eine Garantie nicht abzusichern. Es stellt sich nun die Frage, welche Auswirkungen das Hedging hat, wenn die Garantie zu Vertragsende nicht „im Geld“³⁶ ist. Diese Situation tritt unter dem folgenden Szenario auf:



(a) DAX



(b) Short Rate

Abbildung 4.7: Szenario 2 - DAX und Short Rate

Unter Szenario 2 beträgt der Wert der DAX-Anteile zu Vertragsende 68.087 € und übersteigt damit die garantierte Leistung von 50.000 € . Die Garantie führt daher zu

³⁵Negativer Verlust = Gewinn.

³⁶Das ist eine Bezeichnung aus der Optionstheorie. Eine Put-Option ist „im Geld“, wenn der Wert des Underlyings unter dem Ausübungspreis liegt. Im Falle der Garantie bedeutet das, dass der Wert der Index-Anteile unter dem garantierten Betrag G liegt und damit die Garantie zu einer positiven Auszahlung führt.

keiner Auszahlung und das Versicherungsunternehmen erzielt einen Gewinn in Höhe der verzinster Garantiegebühr.

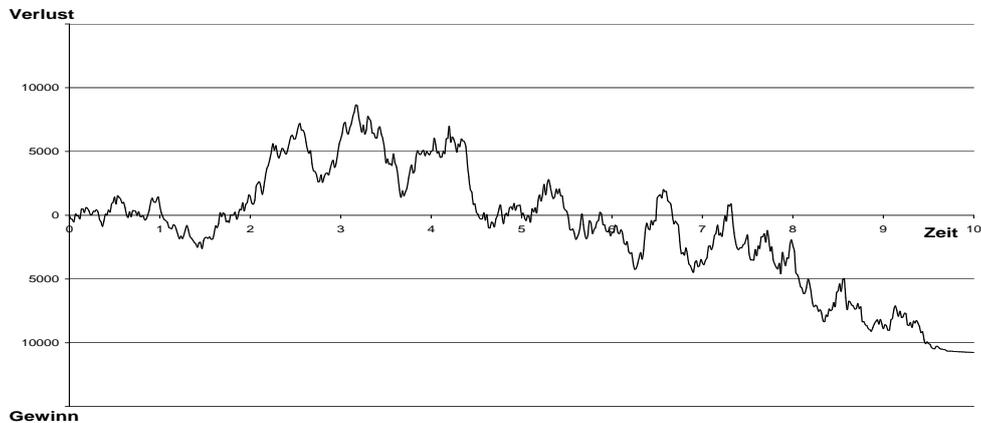


Abbildung 4.8: Szenario 2 - Periodenverluste/-gewinne ohne Hedging

In Abbildung 4.8 sind die Periodenverluste/-gewinne dargestellt, die sich ergeben, falls kein Hedging durchgeführt wird. Nach Hedging verhalten sich die Periodenverluste/-gewinne dagegen gemäß Abbildung 4.9.

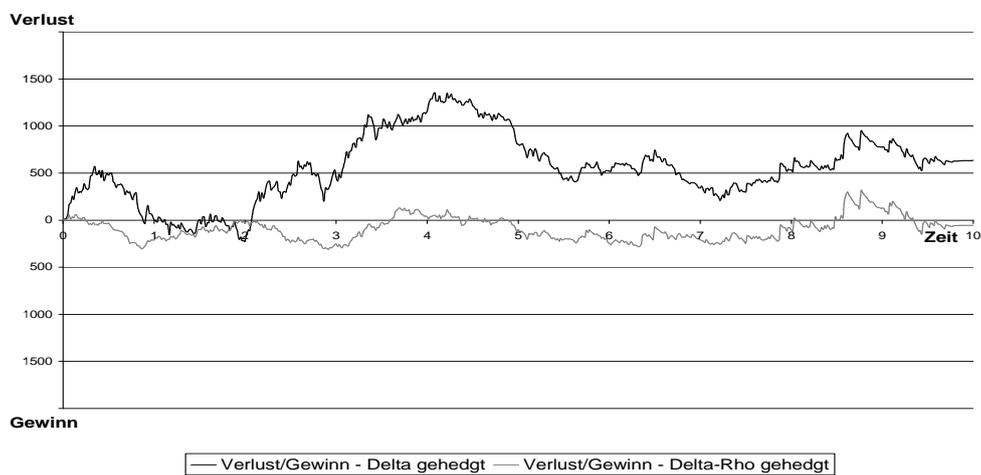


Abbildung 4.9: Szenario 2 - Periodenverluste/-gewinne nach Hedging

Wie ein Vergleich zwischen den Abbildungen 4.8 und 4.9 zeigt, führt das Hedging erneut zu einer starken Reduktion der Ergebnisschwankungen. Dennoch hat das Hedging unter diesem Szenario einen „negativen Effekt“. Während ohne Hedging

zu Vertragsende die verzinste Garantiegebühr als Gewinn gutgeschrieben werden konnte, wird nach der Anwendung des Delta-Rho-Hedgings nur noch ein sehr kleiner Gewinn erzielt und unter der Delta-Hedging-Strategie tritt sogar ein kleiner Verlust auf. Daher wäre es unter diesem Szenario vorteilhafter, kein Hedging durchzuführen.

Durch die Anwendung des dynamischen Hedgings unter zwei ausgewählten Szenarien konnten wir einen ersten Eindruck über seine Wirkungsweise gewinnen.

Um allgemeingültige Aussagen treffen zu können, genügt es jedoch nicht, den Einfluss des Hedgings auf die Verluste/Gewinne aus der Garantie unter einzelnen Szenarien zu untersuchen. Stattdessen generieren wir nun 10.000 Kapitalmarktszenarien und vergleichen die Verteilungen der Periodenverluste/-gewinne ohne Hedging, nach Delta- und Delta-Rho-Hedging mit Hilfe von Quantilen, Erwartungswert und Standardabweichung.

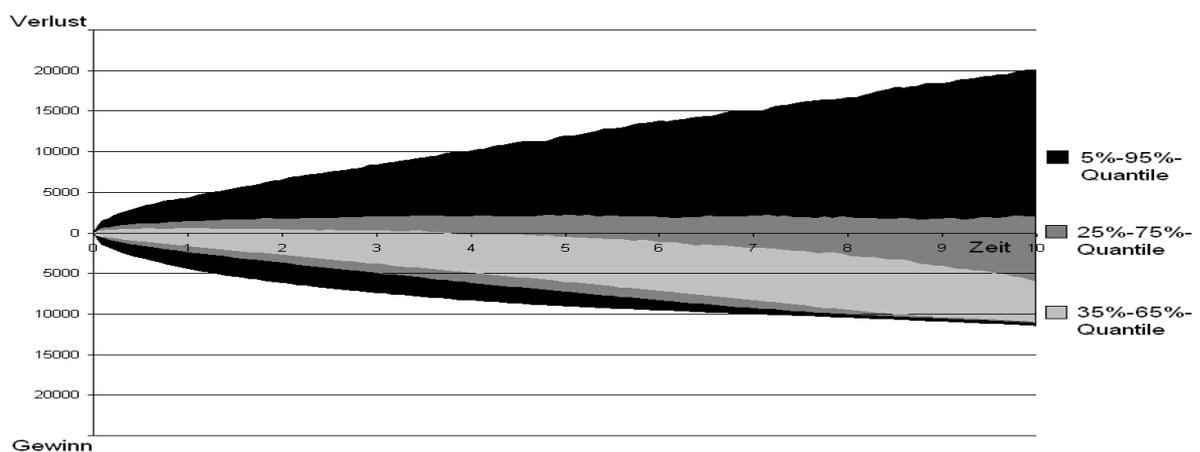


Abbildung 4.10: Quantile der Verlustverteilung - ohne Hedging

Abbildung 4.10 zeigt eine Projektion der Periodenverluste/-gewinne in Form von Quantilen für den Fall, dass nicht gehedgt wird. Zu Vertragsende liegen das 5%-Quantil und das 95%-Quantil bei -11.414 € und 19.558 € , was bedeutet, dass sich der Verlust mit 90%-iger Wahrscheinlichkeit zwischen -11.414 € und 19.558 € bewegt. Bei 75% aller Kapitalmarktszenarien liegt der Verlust zu Vertragsende unter 1.300 € . Das 65%-Quantil ist mit -6.984 € bereits negativ. In mindestens 65% aller Fälle wird zu Vertragsende also ein Gewinn aus der Garantie erzielt.

Der erwartete Verlust zu Vertragsende liegt bei -4.193 € , also bei einem Gewinn von 4.193 € , mit einer Standardabweichung von 10.671 € . Die Garantie führt ohne Hedging im Mittel folglich zu einem Gewinn, jedoch ist das Verlustrisiko sehr hoch.

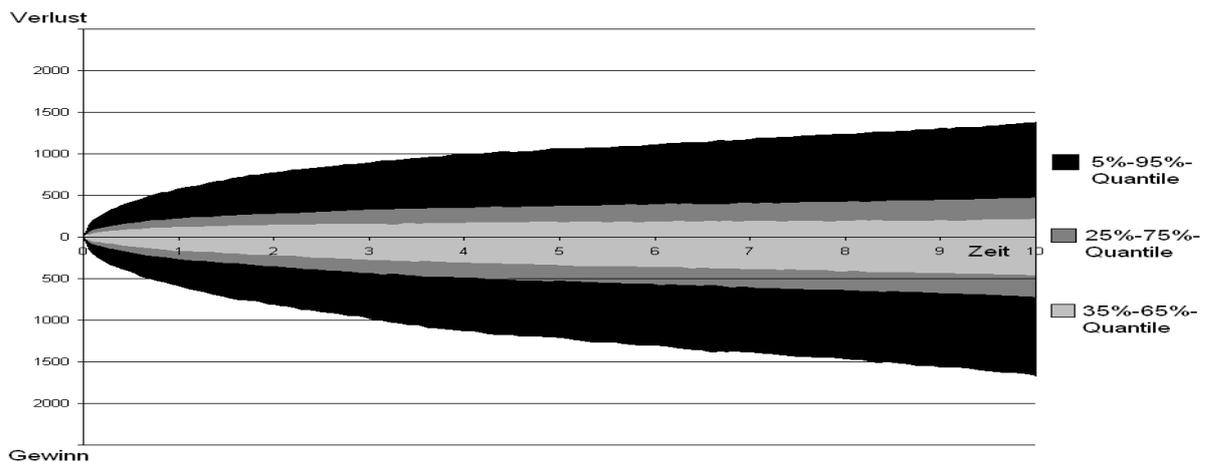


Abbildung 4.11: Quantile der Verlustverteilung - Delta gehedgt

Nach Anwendung eines Delta-Hedgings verändert sich die Verlustverteilung erheblich. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% liegt der Verlust zu Vertragsende nun über -1.638 € und unter 1.384 € . Im Bereich von -691 € und 492 € bewegt er sich mit 50%iger-Wahrscheinlichkeit. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 30% liegt der Verlust zwischen -424 € und 242 € . Die Spannbreite der möglichen Verluste/Gewinne wird durch Hedging also deutlich reduziert.

Durch das Hedging verringert sich jedoch auch der erwartete Gewinn. Ohne Hedging betrug er 4.193 € , nach Delta-Hedging liegt er nur noch bei 107 € . Die Standardabweichung ist von 10.671 € auf 921 € gesunken.

Sichert man neben Delta auch noch das Zinsänderungsrisiko (Delta-Rho-Hedging) ab, so ergeben sich die in Abbildung 4.12 dargestellten Quantile:

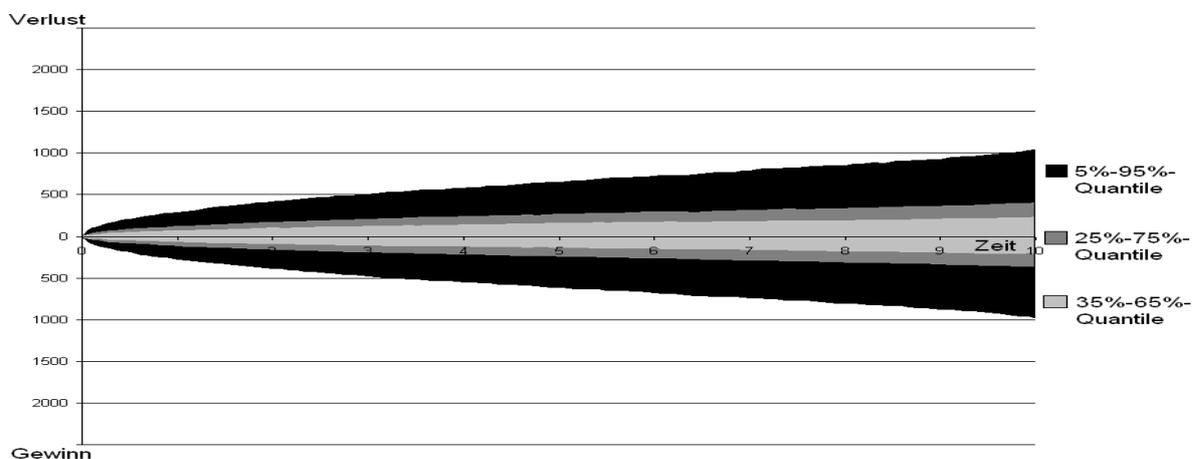


Abbildung 4.12: Quantile der Verlustverteilung - Delta-Rho gehedgt

Der erwartete Verlust zu Vertragsende beträgt nach Delta-Rho-Hedging 23 € mit einer Standardabweichung von 618 €. Somit wird durch Hinzunahme von Rho einerseits die Standardabweichung der Verluste/Gewinne weiter reduziert, jedoch liegt andererseits der erwartete Verlust/Gewinn nun erstmals bei einem kleinen Verlust.

Abschließend fassen wir zusammen: Dynamisches Hedging führt zu einer Stabilisierung der Verluste/Gewinne aus der Garantie, jedoch auf Kosten des erwarteten Gewinns. Eine Hedging-Strategie kann daher dann als effizient bezeichnet werden, wenn die Reduktion des erwarteten Gewinns durch Anwendung der Hedging-Strategie klein ist und gleichzeitig die Verluste/Gewinne nach Hedging nur noch geringen Schwankungen unterliegen. Somit muss ein quantitativer Vergleich verschiedener Hedging-Strategien immer auf der Grundlage mehrerer Faktoren wie erwartetem Verlust/Gewinn, Standardabweichung und Quantilen der Verlustverteilung erfolgen.

In der folgenden Tabelle sind die Werte dieser Kennzahlen unter den verschiedenen Strategien noch einmal zum Vergleich aufgeführt:

	ohne Hedging	Delta gehedgt	Delta-Rho gehedgt
Erwartungswert	-4.193	-107	23
Standardabweichung	10.671	921	618
95%-Quantil	19.558	1.384	1.034

Tabelle 4.2: Verlustverteilung zu Vertragsende - Kennzahlen

Kapitel 5

Fazit und Ausblick

Die dieser Arbeit zugrunde liegenden Modelle, das Finanzmarktmodell und das Vertragsmodell, wurden bewusst einfach gewählt. Dadurch konnten wir mit relativ einfachen Mitteln und ohne großen numerischen Aufwand die Garantie und die Hedge-Assets bewerten. Durch diese vereinfachten Annahmen sind die Resultate dieser Arbeit jedoch nur eingeschränkt auf die Praxis übertragbar.

So spiegelt beispielsweise die Annahme der konstanten Volatilität nicht das tatsächliche Kapitalmarktgeschehen wieder. Als sinnvolle Erweiterung des Kapitalmarktmodells bietet sich daher die Modellierung mit stochastischer Volatilität an. Als Folge unterliegt der Wert der Garantie dann neben dem Kursänderungsrisiko und dem Zinsänderungsrisiko auch dem Volatilitätsänderungsrisiko. Um die Garantie dagegen abzusichern, muss zusätzlich Vega geheged werden. Vega misst die Sensitivität des Index bezüglich Änderungen der Volatilität und zählt wie Delta und Rho zu den „Greeks“. Das in diesem Paper dargestellte Konzept des Delta-Rho-Hedgings lässt sich ohne Weiteres auf das Delta-Vega-Rho-Hedging übertragen. Das Hedgeportfolio wird um ein Hedge-Assets mit zur Garantie passendem Vega erweitert und zur Bestimmung der Portfoliozusammensetzung wird neben Delta und Rho auch Vega mit einbezogen. Allerdings liegt die Schwierigkeit unter einem stochastischen Volatilitätsmodell in der Bewertung der Garantie und der Hedge-Assets, da meist keine geschlossenen Formeln zur Bewertung mehr gefunden werden können.

Bei index- und fondsgebundenen Produkten ist es üblich, die Garantiegebühr als jährlich festen Prozentsatz des Index- bzw. Fondsguthaben zu entnehmen. Die Umstellung des Vertragsmodell auf diese Art der Prämienzahlungsweise ist daher eine weitere mögliche Erweiterung des Modells.

Schließlich wäre es noch sinnvoll, die Modellierung und das Hedging auf Bestandesebene zu übertragen, um mögliche Ausgleichseffekte im Bestand untersuchen zu können.

Abschließend lässt sich zusammenfassen: In dieser Arbeit haben wir das Hedging an einem Grundmodell durchgeführt. Mit unseren Untersuchungen und Ausführungen konnte die Durchführung des dynamischen Hedgings erklärt und seine Wirkung veranschaulicht werden. Ebenso lässt sich das von uns aufgebaute Grundmodell als Grundgerüst für weiterführende Untersuchungen und Betrachtungen verwenden.

Anhang A

Risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß

Seien $W_1^{\mathbb{P}}$ und $W_2^{\mathbb{P}}$ zwei unabhängige Brownsche Bewegungen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ ein Prozess, der die Novikov Bedingung $\mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T \|\lambda(s)\|^2 ds \right\} \right) < \infty$ erfüllt.

Nach dem Girsanov-Theorem³⁷ sind

$$\begin{aligned} W_1^{\mathbb{Q}}(t) &= W_1^{\mathbb{P}}(t) + \int_0^t \lambda_1(s) ds, \\ W_2^{\mathbb{Q}}(t) &= W_2^{\mathbb{P}}(t) + \int_0^t \lambda_2(s) ds \end{aligned}$$

Brownsche Bewegungen unter \mathbb{Q} , wobei \mathbb{Q} durch die Radon-Nikodym Dichte

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp \left(- \left(\int_0^T \lambda_1(s) dW_1^{\mathbb{Q}} + \int_0^T \lambda_2(s) dW_2^{\mathbb{Q}} \right) - \frac{1}{2} \left(\int_0^T \lambda_1^2(s) ds + \int_0^T \lambda_2^2(s) ds \right) \right)$$

gegeben und ein zu \mathbb{P} äquivalentes Maß ist.

Mit dem Ito-Lemma³⁸ erhalten wir für $\tilde{S}(t) = e^{-\int_0^t r(s) ds} S(t)$:

$$d\tilde{S}(t) = e^{-\int_0^t r(s) ds} dS(t) - r(t) e^{-\int_0^t r(s) ds} S(t) dt$$

³⁷Vgl. [BingKies 04, S. 199].

³⁸Vgl. [BingKies 04, S. 195].

$$\begin{aligned}
 &= \mu \tilde{S}(t)dt + \sigma \tilde{S}(t) \left(\rho dW_1^{\mathbb{P}}(t) + \sqrt{1 - \rho^2} dW_2^{\mathbb{P}}(t) \right) - r(t) \tilde{S}(t)dt \\
 &= (\mu - r(t)) \tilde{S}(t)dt + \sigma \tilde{S}(t) \left(\rho dW_1^{\mathbb{P}}(t) + \sqrt{1 - \rho^2} dW_2^{\mathbb{P}}(t) \right) \\
 &= (\mu - r(t)) \tilde{S}(t)dt + \sigma \tilde{S}(t) \left(\rho (dW_1^{\mathbb{Q}}(t) - \lambda_1(t)dt) + \sqrt{1 - \rho^2} (dW_2^{\mathbb{Q}}(t) - \lambda_2(t)dt) \right) \\
 &= \left(\mu - r(t) - \sigma \rho \lambda_1(t) - \sigma \sqrt{1 - \rho^2} \lambda_2(t) \right) \tilde{S}(t)dt + \sigma \tilde{S}(t) \left(\rho dW_1^{\mathbb{Q}}(t) + \sqrt{1 - \rho^2} dW_2^{\mathbb{Q}}(t) \right)
 \end{aligned}$$

\mathbb{Q} ist definitionsgemäß dann ein risikoneutrales Maß, wenn $\tilde{S}(t)$ ein Martingal unter \mathbb{Q} ist. Das ist wiederum genau dann der Fall, wenn der Drift-Term verschwindet³⁹. Daher muss gelten:

$$\lambda_2(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \left(\frac{\mu - r(t)}{\sigma} - \rho \lambda_1(t) \right).$$

³⁹Zu diesem Resultat siehe etwa [Björk 05, S. 44].

Literaturverzeichnis

[BingKies 04]

Bingham N., Kiesel R.: Risk-Neutral Valuation – Pricing and Hedging of Financial Derivatives.
Springer Finance, Berlin, 2004

[Björk 05]

Björk T.: Arbitrage Theory in Continuous Time.
Oxford University Press, New York, 2004

[BriMer 06]

Brigo D., Mercurio F.: Interest Rate Models – Theory and Practice.
Springer Finance, Berlin, 2006

[FMW 03]

Fischer T., May A. und Walther B.: Anpassung eines CIR-1- Modells zur Simulation der Zinsstrukturkurve.
Blätter der DGVFM XXVI, 2003.

[HolKlinge 06]

Holler H., Klinge U.: Variable Annuities - Absicherung des Garantierisikos durch Einführung eines Hedgingprogramms.
Versicherungswirtschaft, Heft 11/2006, S. 88-90.

[Hull 01]

Hull J.: Optionen, Futures und andere Derivate.
Oldenbourg, München, 2001.

[Kurz 97]

Kurz A.: Die Fondsgebundene Lebensversicherung mit Mindestgarantie – Modelltheoretische Bewertungen und Anforderungen an das Asset-Liability-Management.
VVW, Karlsruhe, 1997

[LinTan]

Lin S., Tan K. S.: Valuation of Equity-Indexed Annuities under Stochastic Interest Rate. Download unter <http://www.actuaries.org/AFIR/colloquia/Toronto>

[Russ 99]

Ruß J.: Die Aktienindexgebundene Lebensversicherung mit garantierter Mindestverzinsung in Deutschland.
ifa-Schriftenreihe, Ulm, 1999

[Traut 06]

Trautmann, S.: Investitionen - Bewertung, Auswahl und Risikomanagement.
Springer, Berlin, 2006