Tag der Mathematik 2012

Gruppenwettbewerb
Einzelwettbewerb
Mathematische Hürden

Aufgaben mit Lösungen und Bepunktung

Allgemeine Hinweise:
Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

Aufgaben bitte nur auf den Aufgabenblättern bearbeiten und abgeben!

Hinweise für Korrektoren

Generell gilt:

Zielführende Zwischenschritte geben Punkte, auch wenn das Ergebnis falsch ist oder fehlt.

Aufgabenspezifische Bepunktungshinweise sind kursiv gedruckt. Zusätzlich sind die zu vergebenden Punkte neben den entsprechenden Stellen der Lösung am Rand angegeben.

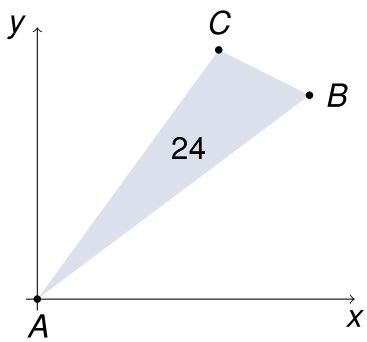
Hinweis zu den Hürdenaufgaben:

Bei den Hürden müssen die Zwischenschritte nicht erkennbar sein, nur das Ergebnis zählt.

Falls zielführende Zwischenschritte ohne Endergebnis angegeben sind, kann man sie mit 1 oder 2 Punkten bewerten.

In der Regel ist es allerdings kaum möglich Teilpunkte zu vergeben, da selten Zwischenschritte angegeben werden.

Aufgabe G1

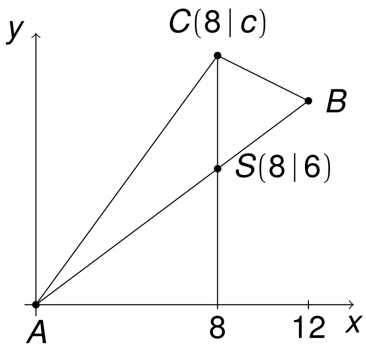


Gegeben sind die Punkte $A(0\,|\,0)$, $B(12\,|\,9)$ und $C(8\,|\,c)$.

Für welche c hat das Dreieck ABC die Fläche 24?

Lösung

Für $c = 6$ ist die Fläche 0. Sei $S(8\,|\,6)$. 2



1

Aus $\Delta ABC = \Delta ASC + \Delta SBC = 24$ folgt entweder

$$\frac{1}{2}(c-6)(8+4) = 24 \text{ für } c > 6$$ 3

oder

$$\frac{1}{2}(6-c)(8+4) = 24 \text{ für } c < 6.$$ 3

Also ist $c = 10$ oder $c = 2$

Für den Hilfspunkt S gibt es 2 Punkte, für jede der Lösungen 3 Punkte. Die optionale Zeichnung wird mit 1 Punkt bewertet.

Aufgabe G2

Für die Parabel $f(x) = ax^2 + bx + c$ gilt

(i) $f(x) = f'(x) \cdot f'(x)$,

(ii) $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx = \frac{7}{12}$,

(iii) $f'(1) < 0$.

Bestimmen Sie a, b und c.

Lösung

(i) Aus

$$ax^2 + bx + c = (2ax + b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2 \qquad \boxed{2}$$

folgt $a = 4a^2$, $b = 4ab$ und $c = b^2$, also

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + bx + b^2. \qquad \boxed{1}$$

Für den Ansatz gibt es 2 Punkte, für die Funktionsgleichung 1 Punkt.

(ii) Aus

$$\int_1^2 (\frac{1}{4}x^3 + bx + b^2)dx = \left[\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}bx^2 + b^2x\right]_1^2 = \frac{7}{12} + \frac{3}{2}b + b^2 = \frac{7}{12} \qquad \boxed{2}$$

folgt $b(\frac{3}{2} + b) = 0$, also $b = 0$ oder $b = -\frac{3}{2}$. $\boxed{1}$

Hier gibt es ebenfalls 2 Punkte für den Ansatz.

(iii) Aus $f'(1) < 0$ folgt $\frac{1}{2} + b < 0$. Wegen (ii) gilt $b = -\frac{3}{2}$.

Für die Lösung von b gibt es 1 Punkt.

Somit gilt $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$. $\boxed{2}$

Das Gesamtergebnis wird mit 2 Punkten bewertet.

Aufgabe G3

Die Geraden $y = x + 1$, $y = mx - 1$ und $y = -4x + 2m$ gehen alle durch einen Punkt. Bestimmen Sie alle möglichen Werte von m.

Lösung

Aus $x + 1 = mx - 1$ und $mx - 1 = -4x + 2m$ folgt

$$x = \frac{2}{m-1}$$ 3

und

$$2m^2 - 3m - 9 = 0.$$ 3

Also gilt $(m-3)(2m+3) = 0$ und somit $m = 3$ oder $m = -\frac{3}{2}$. 2

Jeweils 3 Punkte für die hergeleiteten Gleichungen und 2 Punkte für die Lösung.

Aufgabe G4

Tom und Jerry gehen unabhängig von einander zweimal jede Woche um 12 Uhr ins gleiche Restaurant zum Essen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie sich

a) keinmal,

b) genau einmal,

c) zweimal

treffen?

Lösung

In einer Urne sind 5 weiße und 2 schwarze Kugeln. Die beiden schwarzen Kugeln bedeuten die beiden Wochentage, an denen Tom ins Restaurant geht. Jerry zieht zwei Kugeln aus der Urne. $\boxed{2}$

a) $P(\text{kein Treffen}) = P(\text{zwei weiße Kugeln})$
$$= \frac{\binom{5}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{10}{21}.$$ $\boxed{2}$

b) $P(\text{genau ein Treffen}) = P(\text{eine weiße und eine schwarze Kugel})$
$$= \frac{\binom{5}{1}\binom{2}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{21}.$$ $\boxed{2}$

c) $P(\text{zwei Treffen}) = P(\text{zwei schwarze Kugeln})$
$$= \frac{\binom{2}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{21}.$$ $\boxed{2}$

Der Ansatz wird mit 2 Punkten bewertet, jedes korrekte Ergebnis ebenfalls mit 2 Punkten.

Aufgabe E1

Familie Meier besteht aus Mutter, Vater und mehreren Kindern. Der Vater ist 43 Jahre alt. Das durchschnittliche Alter aller Familienangehörigen ist 15, ohne den Vater ist es 11. Wie viele Kinder sind in der Familie?

Lösung

Seien k die Anzahl der Kinder und s die Summe der Alter aller Familienangehörigen. Dann gilt

$$15 = \frac{s}{k+2}$$ 3

und

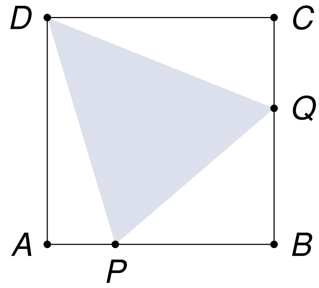
$$11 = \frac{s-43}{k+1}.$$ 3

Hieraus folgt $k = 6$. 2

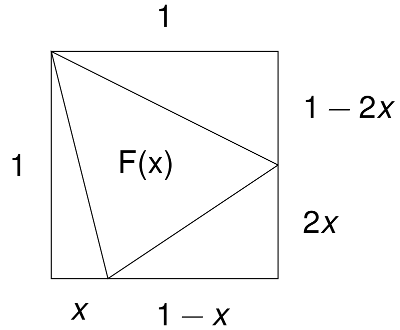
Die beiden Gleichungen geben je 3 Punkte, die richtige Lösung 2 Punkte.

Aufgabe E2

Im Einheitsquadrat $ABCD$ werden zwei Punkte P auf AB und Q auf BC so gewählt, dass $BQ = 2 \cdot AP$. Wie muss $x := AP$ gewählt werden, damit das Dreieck PQD minimale Fläche hat?



Lösung



2

Fläche $F(x) = 1 - \frac{1}{2}(x + 2x(1-x) + 1 - 2x) = x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$. 3

1. Lösung: $F(x) = x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = (x - \frac{1}{4})^2 + \frac{7}{16}$ ist minimal für $x = \frac{1}{4}$.

2. Lösung: Aus $F'(x) = 2x - \frac{1}{2} = 0$ folgt $x = \frac{1}{4}$. 2

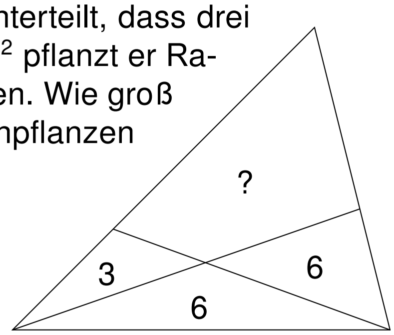
Wegen $F''(x) = 2 > 0$ liegt ein Minimum vor. 1

Eine sprechende Skizze ist 2 Punkte wert. Die Formel $F(x)$ wird mit 3 Punkten bewertet. Für die Begründung des Minimums wird 1 Punkt vergeben, für $x = \frac{1}{4}$ weitere 2 Punkte.

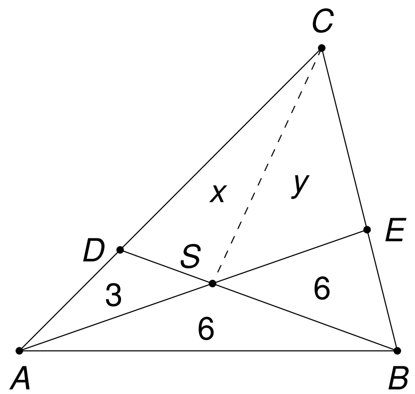
Zentrum für Mathematik · Kinzigstraße 32 · 64625 Bensheim · 06251-7079941
Internet: www.z-f-m.de · Email: marius.nuechter@z-f-m.de

Aufgabe E3

Onkel Franz hat seinen dreieckigen Garten so unterteilt, dass drei Beete dreieckig sind und eines viereckig. Auf 3 m^2 pflanzt er Radieschen und auf jeweils 6 m^2 Kohlrabi und Möhren. Wie groß ist das viereckige Beet, auf dem er Kartoffeln anpflanzen will?



Lösung



2

Es ist $AS = SE$, denn die Dreiecke ABS und BES sind flächengleich und haben eine gemeinsame Höhe durch B. 1

Es gilt $BS = 2 \cdot DS$, denn $\Delta ABS = 2 \cdot \Delta ASD$ mit der gemeinsamen Höhe durch A. 2

Daher gilt für die Fläche x von ΔSCD und y von ΔSEC

$$x + 3 = y \quad \text{und} \quad \frac{x}{y+6} = \frac{1}{2}.$$ 2

Hieraus folgt $x = 9$ und $y = 12$. Also kann Onkel Franz auf $x + y = 21$ m^2 Kartoffeln anpflanzen. 1

Eine sprechende Skizze ist 2 Punkte wert. Die Gleichung $AS = SE$ ist 1 Punkt wert, die Gleichung $BS = 2 \cdot DS$ ist 2 Punkte wert. Das Aufstellen eines linearen Gleichungssystems in x und y wird mit 2 Punkten bewertet. Für das Endergebnis gibt es 1 Punkt.

Zentrum für Mathematik · Kinzigstraße 32 · 64625 Bensheim · 06251-7079941
Internet: www.z-f-m.de · Email: marius.nuechter@z-f-m.de

Aufgabe H1

Für welches n gilt

$$2^{2012} - 2^{2011} - 2^{2010} + 2^{2009} = n \cdot 2^{2008}?$$

Lösung

Aus

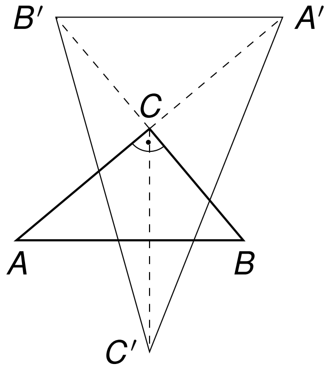
$$2^{2008} \cdot (2^4 - 2^3 - 2^2 + 2^1) = n \cdot 2^{2008}$$

folgt $n = 16 - 8 - 4 + 2 = 6$. 8

Ist nur der Ansatz vorhanden gibt es 4 *Punkte, bei korrektem Ergebnis* 8 *Punkte.*

Aufgabe H2

Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit der Fläche 1. Spiegele A, B und C an den gegenüberliegenden Dreiecksseiten nach A', B' bzw. C'. Welche Fläche hat das Dreieck $A'B'C'$?



Lösung

Das Dreieck $A'B'C$ ist kongruent zum Dreieck ABC, also ist $A'B' = AB$ und $A'B' \| AB$. Die zu C' gehörende Höhe im Dreieck $A'B'C'$ ist dreimal so lang wie die des Dreiecks ABC. Also hat $A'B'C'$ die Fläche 3. 8

Jedes zielführende Teilergebnis ist 2 *Punkte wert, bei korrektem Ergebnis gibt es* 8 *Punkte.*

Aufgabe H3

Berechnen Sie $a^3 + b^3$, wenn $a + b = 5$ und $a \cdot b = 1$ gilt.

Lösung

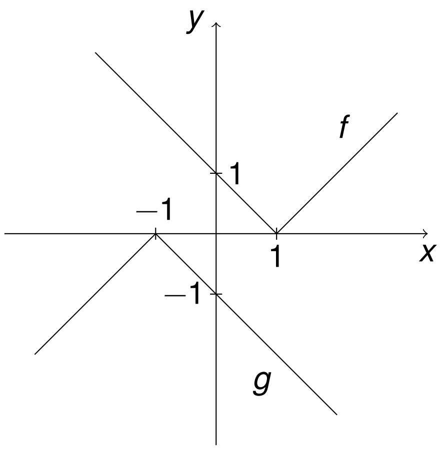
$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 5^3 - 3 \cdot 1 \cdot 5 = 110.$ 8

Jedes zielführende Teilergebnis ist 2 Punkte wert, bei korrektem Ergebnis gibt es 8 Punkte.

Aufgabe H4

Die Funktionen f und g sind im (x, y)-Koordinatensystem dargestellt. f und g entstehen aus $y = |x|$ durch Verschiebung bzw. Verschiebung und Spiegelung.

Geben Sie die Gleichungen für f und g an. Welcher Zusammenhang besteht zwischen $f(x)$ und $g(x)$?



Lösung

Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= |x-1| \\ g(x) &= -|x+1| \end{aligned}$$ 3 3

sowie

$$f(x) = -g(x-2).$$ 2

Für die Gleichungen von $f(x)$ und $g(x)$ gibt es jeweils 3 Punkte, 2 Punkte für den Zusammenhang zwischen f und g.

Aufgabe H5

Bestimmen Sie alle Paare (a,b) natürlicher Zahlen mit $0 < a < b < 100$, für die gilt

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{b} - \sqrt{a}.$$

Lösung

Aus $(\sqrt{a-\sqrt{b}})^2 = (\sqrt{b}-\sqrt{a})^2$ folgt $a-\sqrt{b} = b+a-2\sqrt{ab}$, also $\sqrt{b} = 2\sqrt{a}-1$. Durch beidseitiges Quadrieren erhält man $\sqrt{a} = (4a-b+1)/4$, also ist $\sqrt{a}$ eine ganzrationale Zahl. Die folgende Tabelle enthält alle gesuchten Paare: 1

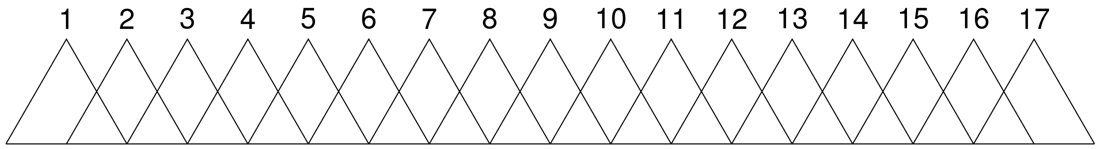
a	1	4	9	16	25
b	1	9	25	49	81

7

Für die Erkentniss dass $\sqrt{a}$ eine ganzrationale Zahl sein muss gibt es 1 *Punkt. Für die gefundenen Paare gibt es, aufsteigend sortiert,* 1, 1, 1, 2 *bzw.* 2 *Punkte.*

Aufgabe H6

Es werden 17 gleichseitige Dreiecke (Flächeninhalt 1) so hintereinandergelegt, dass eine Seite auf einer Geraden liegt und die Seitenmitte die Ecke des benachbarten Dreiecks ist:

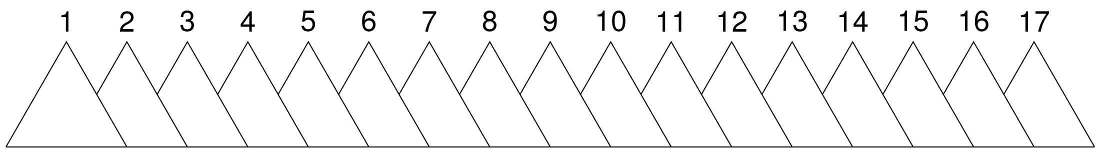


Wie groß ist die Fläche dieser sägezahnartigen Figur?

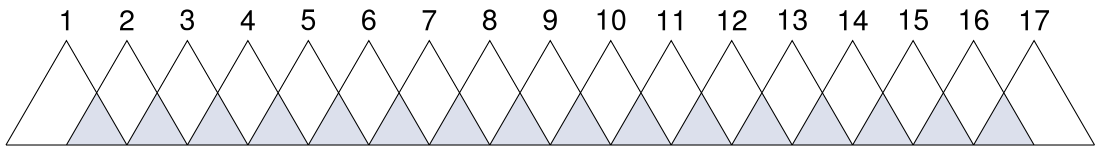
Lösung

8

1. Lösung: Fläche: $1 + 16 \cdot \frac{3}{4} = 13$.



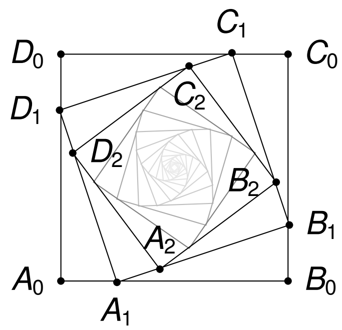
2. Lösung: Fläche: $17 \cdot 1 - 16 \cdot \frac{1}{4} = 13$.



Für eine zielführende Skizze gibt es 4 *Punkte, bei korrektem Ergebnis* 8 *Punkte.*

Aufgabe H7

In das Quadrat $A_0B_0C_0D_0$ wird ein Quadrat so eingezeichnet, dass die Ecken A_1, B_1, C_1, D_1 die Seiten von A_0, B_0, C_0, D_0 im Verhältnis 1 : 3 teilen. Das nächste Quadrat $A_2B_2C_2D_2$ entsteht entsprechend aus $A_1B_1C_1D_1$, und so weiter.



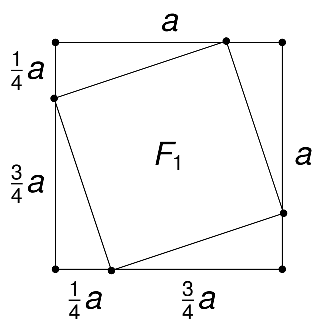
Sei F_n die Fläche des Quadrates $A_nB_nC_nD_n$. Es sei $F_0 = a^2$.

a) Berechnen Sie F_1 und F_2 in Abhängigkeit von a.

b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen F_n und F_{n-1}?

Geben Sie eine Formel für F_n an.

Lösung



1

a) $F_1 = a^2 - \frac{1}{4}a \cdot \frac{3}{4}a \cdot 2 = \frac{5}{8}a^2$.

Seitenlänge von F_1: $\sqrt{\frac{5}{8}a^2} = a\sqrt{\frac{5}{8}}$. 3

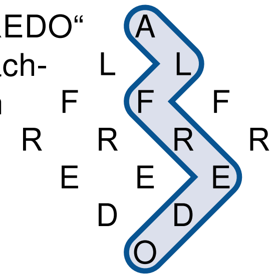
Seitenlänge von F_2: $a\sqrt{\frac{5}{8}}\sqrt{\frac{5}{8}}$, also $F_2 = a^2 \cdot (\frac{5}{8})^2$. 3

b) $F_n = F_{n-1} \cdot \frac{5}{8} = F_{n-2} \cdot (\frac{5}{8})^2 = \cdots = F_0 \cdot (\frac{5}{8})^n = a^2 \cdot (\frac{5}{8})^n$. 2

Die Werte von F_1 und F_2 sind jeweils 3 Punkte wert, die allgemeine Formel für F_n ist 2 Punkte wert. Die optionale Zeichnung wird mit 1 Punkt bewertet.

Aufgabe H8

Wie oft ist in dem Buchstabenschema das Wort „ALFREDO“ zu lesen? Der Übergang von einem Buchstaben zum nächsten soll nur zu dem rechts oder links darunter stehenden möglich sein. Ein mögliches Wort ist markiert.



Lösung

8

1. Lösung: Kodiert man den Übergang von einem Buchstaben zum nächsten durch 1 (nach rechts) oder 0 (nach links), so ist jedes Wort eine $(0,1)$-Folge der Länge 6 mit genau 3 Einsen und 3 Nullen. Zu jeder solchen Folge gibt es genau ein Wort. Zu dem angegebenen Beispiel gehört die Folge 101100. Also gibt es $\binom{6}{3} = 20$ Worte.

2. Lösung: Schreibt man für jeden Buchstaben die Anzahl der Worte, in denen er vorkommt, so ergibt sich ein Pascal-Dreieck, bei dem das O 20mal vorkommt.

```
      1
    1   1
  1   2   1
1   3   3   1
  4   6   4
   10  10
     20
```

Jedes zielführende Teilergebnis ist 2 *Punkte wert, bei korrektem Ergebnis gibt es* 8 *Punkte.*