

# Hauptseminar: Atome Fangen und Kühlen

Vortragsthema:  
Bose-Einstein-Kondensate

Anne Kröske  
07. Januar 2008

# Inhalt

1. Was ist ein Bose-Einstein-Kondensat?
2. Messbare Eigenschaften eines BEK
3. Erzeugung eines BEK

Was ist ein Bose-Einstein-Kondensat?

# Inhalt

1. Was ist ein Bose-Einstein-Kondensat?
  - Grundsätzliche Idee
  - Ideales Gas ohne WW im harmonischen Potential
  - Berücksichtigung endlicher Atomzahlen
  - BEK unter Berücksichtigung von WW
  - Gründe für die begrenzte Lebensdauer eines BEK
2. Messbare Eigenschaften eines BEK
3. Erzeugung eines BEK

# Grundsätzliche Idee

- Betrachtung der Atome als de-Broglie-Wellenpakete

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2\pi mk_B T}}$$

- Also: Je tiefer Temperatur des Gases, desto langsamer die Teilchen, desto größer die Wellenpakete
- Phasenraumdichte:  $\rho = \lambda^3 n \geq 2,6 \rightarrow$  Kondensation  
=> Überlapp der einzelnen Wellenpakete zu einer Gesamtwelle
- Dafür nötig: Große Teilchendichte und/oder ultratiefe Temperaturen

# Statistik für Bosonen

- Voraussetzung für Mehrfachbelegung eines Niveaus: Bosonen => Bose-Einstein-Statistik

$$N(E_i) = \frac{1}{e^{\beta(E_i - \mu)} - 1} \quad (1) \quad \text{wobei } \beta = \frac{1}{k_B T} \quad \text{und } \mu \text{ chem. Pot.}$$

- Singularität: Unendlich hohe Aufenthaltswahrscheinlichkeit für entsprechendes Niveau

- Gesamtzahl der Teilchen:  $N = \sum_{i=0}^{\infty} N(E_i)$

- Also  $N = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} z^j \exp(-j\beta E_i)$  mit  $z = e^{\beta\mu}$

# Harmonisches Potential

- Für isotrope harmonische 3D-Falle:

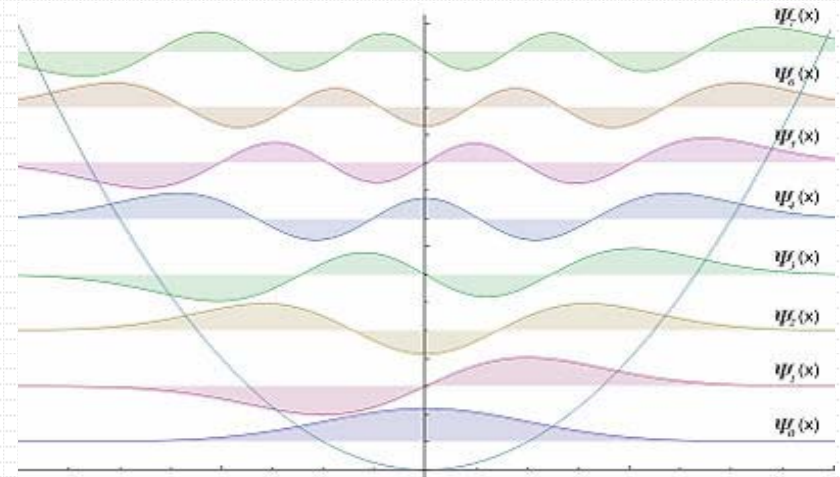
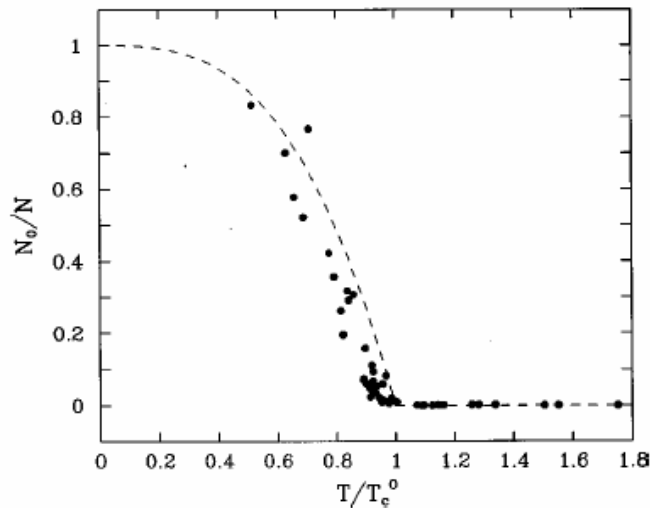
$$N = \sum_{j=1}^{\infty} z^j \left( \frac{1}{1-x^j} \right)^3 \quad \text{mit} \quad x = e^{-\hbar\beta\omega}$$

- Erlaubt numerische Bestimmung von  $\mu$  für verschiedene  $N$
- Daraus mit Gl. (1)  $N_0(T)$  bestimmbar

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^3$$

# Kondensatanteil

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^3$$



Quellen: [3] und [5]

Kritische Temperatur aus  $N_0=0$  und  $\mu=0$  ( $N=\infty$ ):

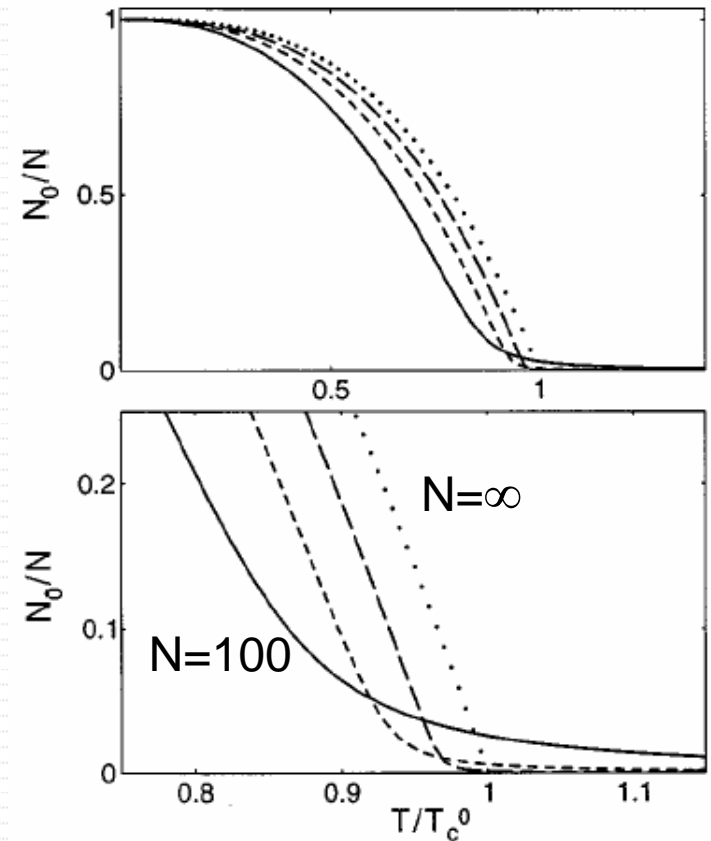
$$T_c^0 = \left( \frac{N}{g_3(1)} \right)^{1/3} \frac{\hbar\omega}{k_B} \quad \text{wobei} \quad g_n(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j^n} \Big|_{n=3, z=1} = 1,202$$

# Verschiebung des Phasenübergangs für endliche Atomzahlen

- Vergleich zeigt ähnliches Verhalten für verschiedene Gesamtzahlen ( $N=10^2, 10^3, 10^4, \infty$ )
- Verschiebung des Übergangs:

$$\begin{aligned}\frac{T_c}{T_c^0} &= 1 - \frac{g_2(1)g_3(1)^{-2/3}}{2} N^{1/3} \\ &= 1 - 0,7275 N^{1/3}\end{aligned}$$

Für  $N=1000$  beträgt Verschiebung etwa 7%



# Vorraussetzung zur Berücksichtigung von Wechselwirkungen

## Kontinuumsnäherung (mean field theory):

- Dem gesamten Kondensat wird eine kontinuierliche Dichteverteilung zugeordnet:

$$\hat{\Psi}_{1,2,\dots,n}(r_1, r_2, \dots, r_n, t) \rightarrow \hat{\Psi}(r, t)$$

- Wellenfunktion für das Kondensat:

$$\phi(r, t) = \langle \hat{\Psi}(r, t) \rangle$$

# Berücksichtigung von Wechselwirkungen

- Wechselwirkungen werden berücksichtigt durch zus. Term in Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(r, t) = \left( -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ext}(r) + g |\phi(r, t)|^2 \right) \phi(r, t)$$

(Gross-Pitaevskii-Gleichung)

Wobei  $g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$  Streufaktor,  $V_{ext} = \frac{m}{2} (\omega_x x^2 + \omega_y y^2 + \omega_z z^2)$

harmonisches Potential und  $a$  Streulänge der S-Wellen

# Begrenzte Lebensdauer eines BEK

Lebensdauer wird begrenzt durch:

- Dreikörperstöße und resultierender Molekülbildung
  - Ergebnis: Ein Molekül und ein beschleunigtes Atom
- Dreikörperstöße und resultierendem Spinflip
  - Ergebnis: Ein Atom wird ungebunden und setzt viel Energie frei
- Stöße mit Restgas (ungekühlte Atome des nichtperfekten Vakuums)

Fazit: BEK ist höchst metastabiler Zustand  
Lebensdauer für Magnetfallen  $\sim$  s

Was sind messbare  
Eigenschaften eines BEK?

# Inhalt

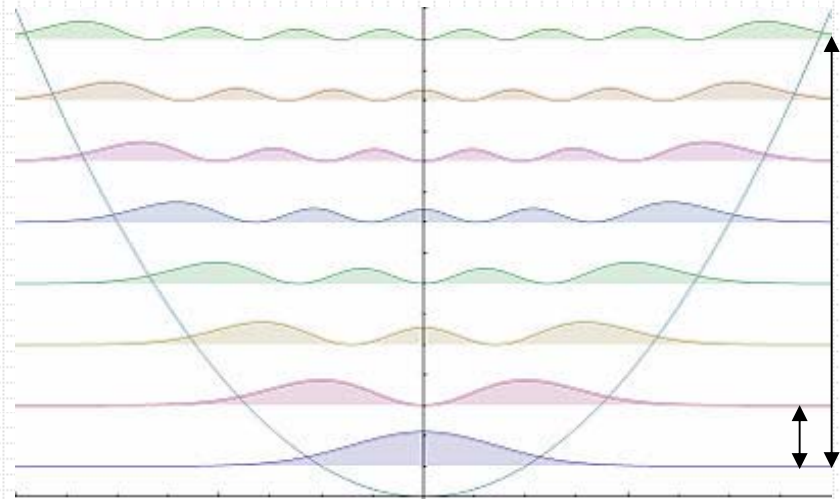
1. Was ist ein Bose-Einstein-Kondensat?
2. Messbare Eigenschaften eines BEK
  - Dichteverteilung
  - Impulsverteilung
  - Aspektverhältnis
  - Superfluidität, Trägheitsmoment und Vortices
  - Interferenzfähigkeit
3. Erzeugung eines BEK

# Erwartete Dichteverteilung

$$n(r) = N \cdot |\phi_0(r)|^2 \quad \text{wobei}$$

$$\phi_0(r) = \left( \frac{m\omega_{ho}}{\pi\hbar} \right)^{3/4} \cdot \exp\left( -\frac{m}{2\hbar} (\omega_x x^2 + \omega_y y^2 + \omega_z z^2) \right)$$

$$\text{und } \omega_{ho} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$$



Quelle: [5]

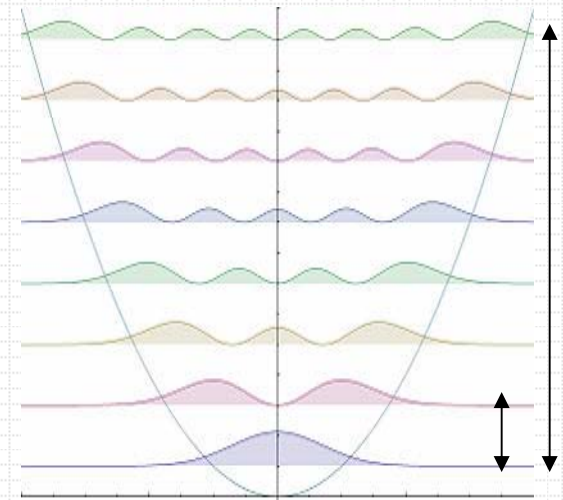
# Ausdehnung der Gasanteile

Ausdehnung des Kondensatanteils ist auf Oszillatorlänge beschränkt:

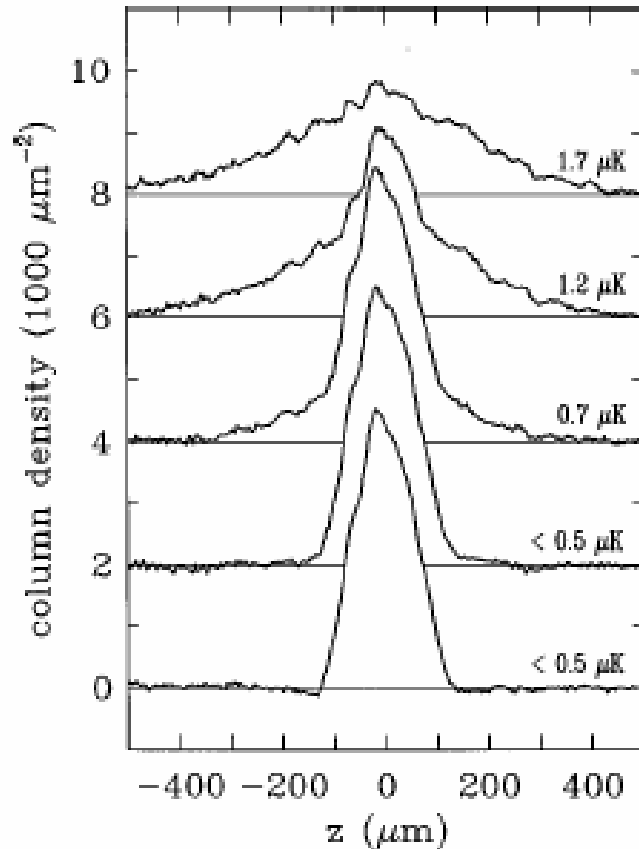
$$a_{ho} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_{ho}}} \approx 1\mu m$$

Ausdehnung thermische Wolke ist Mittelung über alle thermischen Niveaus:

$$R_{th} \cong a_{ho} \left( \frac{k_B T}{\hbar \omega_{ho}} \right)^{1/2} \quad \text{wobei } k_B T \gg \hbar \omega_{ho}$$



# Gemessene Dichteverteilung



Je tiefer T, desto

- höher BEK-Anteil
- geringer thermischer Anteil

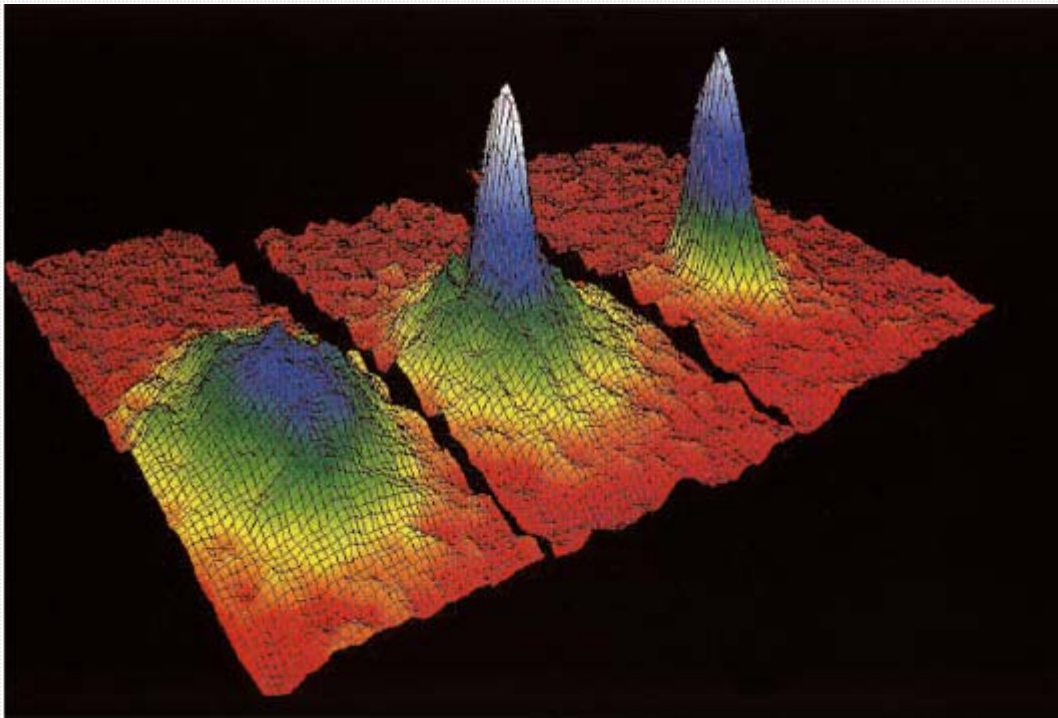
Fallen meist zyl.-symmetrisch

- thermischer Anteil bleibt sphärisch
- BEK-Anteil wird ellipsoid

Quelle: [3]

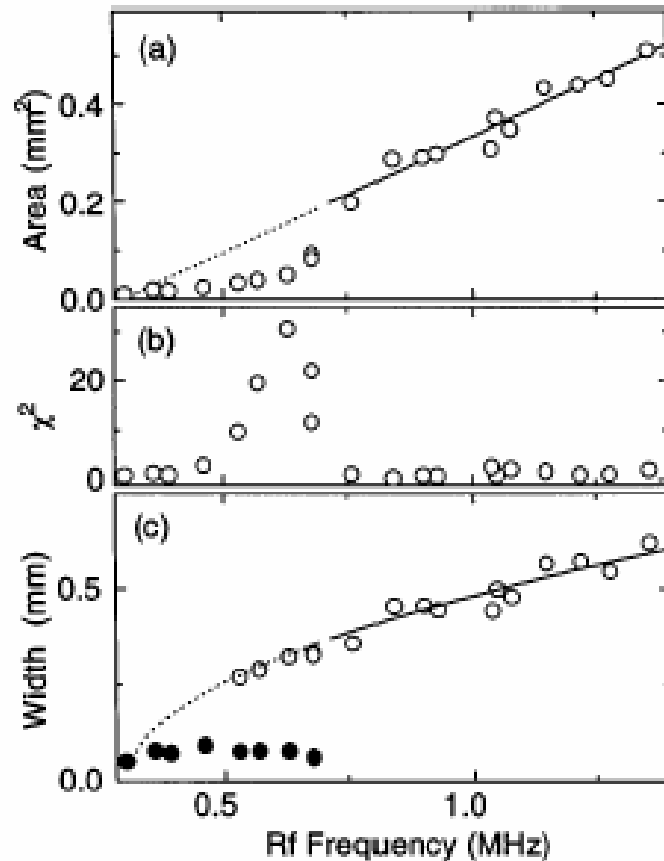
# Impulsverteilung

- Fouriertransformation der Ortsverteilung ergibt Impulsverteilung (harm. Oszillator:  $x \leftrightarrow p$ )
- Erwartung: Ebenfalls zwei überlagerte Gaußfunktionen



Quelle: [3]

# Messergebnisse der ersten Experimente



- Ab kritischer Temperatur nimmt Fläche stark ab
- Örtliche Verteilung offenbar Überlagerung zweier Kurven
  - Eine mit konstanter Breite (BEK)
  - Eine mit abnehmender Breite (thermische Wolke)
- Messung über Laserbestrahlung der Wolke und Absorption bzw. Streuung

Quelle: [2]

# Aspektverhältnis

- Zylindersymmetrie zur z-Achse
- Definition Aspektverhältnis der Falle:  $\lambda = \omega_z / \omega_{\perp}$
- Form der Wolke: Ellipsoid mit Achsenverhältnis  $\lambda^{1/2}$
- Fouriertrafo: Impulsverteilung ebenfalls Ellipsoid mit  $\lambda^{1/2}$
- Folge nach Ausschalten der Falle: Aus  $\lambda < 1$  wird  $\lambda > 1$  und umgekehrt

# Berechnung des Aspektverhältnisses

- Für große Atomzahlen reduziert sich GP-Gleichung auf
  - Kontinuitätsgleichung für die Dichteverteilung

$$\frac{\partial}{\partial t} n + \nabla(\bar{v}n) = 0 \quad (2)$$

- Eulergleichung für das Geschwindigkeitsfeld

$$m \frac{\partial}{\partial t} \bar{v} + \nabla \left( V_{ext} + gn + \frac{mv^2}{2} \right) = 0 \quad (3)$$

- Harmonischer Ansatz:

$$n(\vec{r}, t) = a_0(t) - a_x(t)x^2 - a_y(t)y^2 - a_z(t)z^2$$

$$\bar{v}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \nabla (\alpha_x(t)x^2 + \alpha_y(t)y^2 + \alpha_z(t)z^2)$$

# Messungen des Aspektverhältnisses

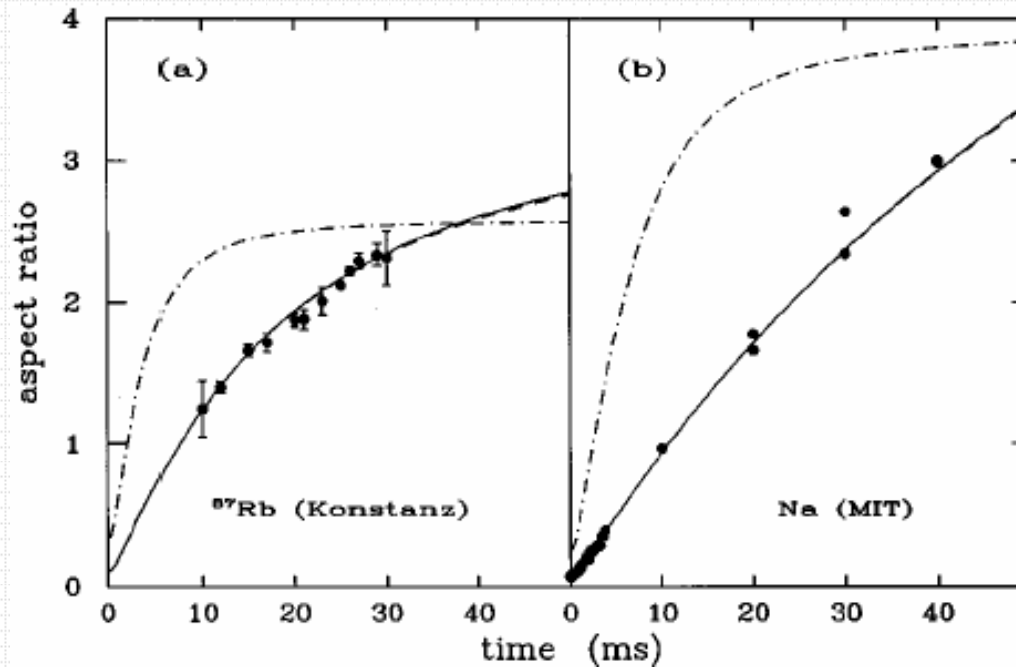
- Normierung auf Ges.-zahl  $N$  ergibt:

$$a_0(t) = \left( \frac{15N}{8\pi} \right)^{2/5} (a_x a_y a_z)^{1/5}$$

- Ansatz in Gl. (2) und (3) gibt gek. DGLn für die  $a_i$  und  $\alpha_i$
- Daraus Bestimmung des Radius der Wolke:

$$R_i(t) = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_{0i}^2} b_i(t)} \quad \text{mit} \quad a_i(t) = \frac{m\omega_{0i}^2}{2gb_x b_y b_z b_i^2}$$

# Messungen des Aspektverhältnisses

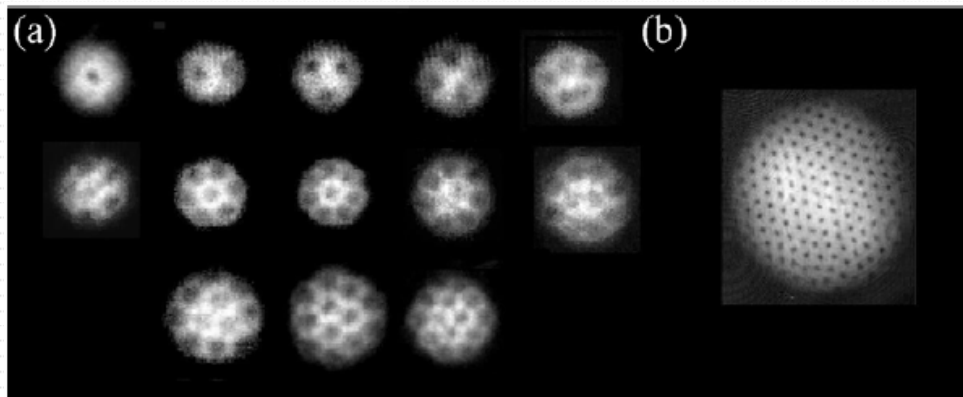


Quelle: [3]

- Punkte: Messung
- Linie: Theorie für experimentelle Werte
- Linie (gestrichelt): Theorie ohne Wechselwirkungen

# Weitere messbare Eigenschaften

- Superfluidität
- Abnahme des Trägheitsmomentes
  - Aufgrund der Superfluidität hat nur thermischer Anteil ein Trägheitsmoment
- Vortices (Sing.: „Vortex“)
  - Bei Drehung eines BEK entstehen ab kritischer Drehfrequenz quantisierte Wirbel („Vortices“)



Quelle: [6]

# Interferenzen

- Erzeugung zweier unabhängiger BEK: Laser in der Mitte des Potentials
- Phase der BEK-Welle:

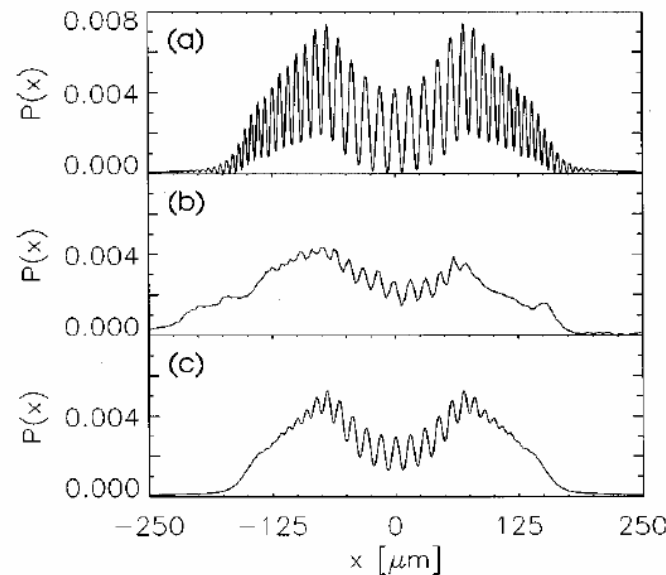
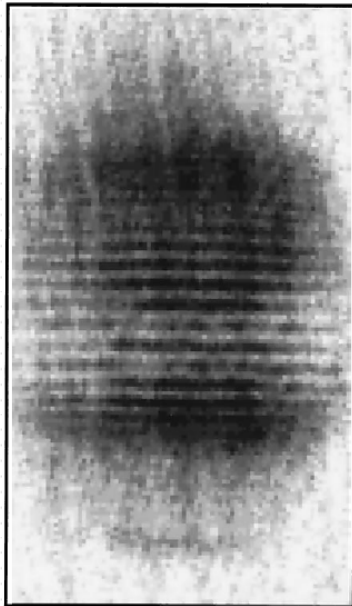
$$S(r, t) = \frac{m}{2\hbar} \nabla \bar{v}$$
$$= \frac{m}{2\hbar} (\alpha_x x^2 + \alpha_y y^2 + \alpha_z z^2)$$

- Mit Abstand  $d$  zweier Kondensate folgt für rel. Phase:

$$S(x, y, z + d/2) - S(x, y, z - d/2) = \frac{m}{2\hbar} z d \alpha_z(t)$$
$$\approx \frac{m}{2\hbar} \frac{z d}{t} \quad (\text{für große Zeiten})$$

# Beobachtete Interferenzen

- Folge: Interferenzmuster senkrecht zur z-Achse
- Wellenlänge des Interferenzmusters:  $\lambda = \frac{ht}{md}$



Quellen: [3], [8]

- Typisch:  $t \approx 40 \text{ms}$ ,  $d \approx 40 \mu\text{m}$ ,  $\lambda \approx 20 \mu\text{m}$

Erzeugung eines BEK

# Inhalt

1. Was ist ein Bose-Einstein-Kondensat?
2. Messbare Eigenschaften eines BEK
3. Erzeugung eines BEK
  - Schritte auf dem Weg zum BEK
  - Prinzip einer Maschine zur Herstellung
  - Evaporatives Kühlen

# Schritte zur Erzeugung eines BEK

Stage	$n(/\text{cm}^3)$	Temperature	Velocity <sup>a</sup>	$\rho$
Oven	$10^{13}$	383 K	334 m/s	$10^{-14}$
Thermal beam	$10^7$	n/a	334 m/s	$10^{-20}$
Slowed beam	$10^7$	n/a	43 m/s	$10^{-18}$
Loading MOT <sup>b</sup>	$10^{10}$	150 $\mu\text{K}$	210 mm/s	$10^{-7}$
Compressed MOT <sup>b</sup>	$10^{11}$	300 $\mu\text{K}$	300 mm/s	$4 \times 10^{-7}$
Molasses <sup>b</sup>	$10^{11}$	10 $\mu\text{K}$	54 mm/s	$6 \times 10^{-5}$
Magnetic trap	$10^{11}$	500 $\mu\text{K}$	380 mm/s	$2 \times 10^{-7}$
BEC transition	$3 \times 10^{13}$	500 nK	12 mm/s	2.61
Pure BEC	$10^{14}$	(250 nK) <sup>c</sup>	8.5 mm/s	(100)

<sup>a</sup>Most probable.

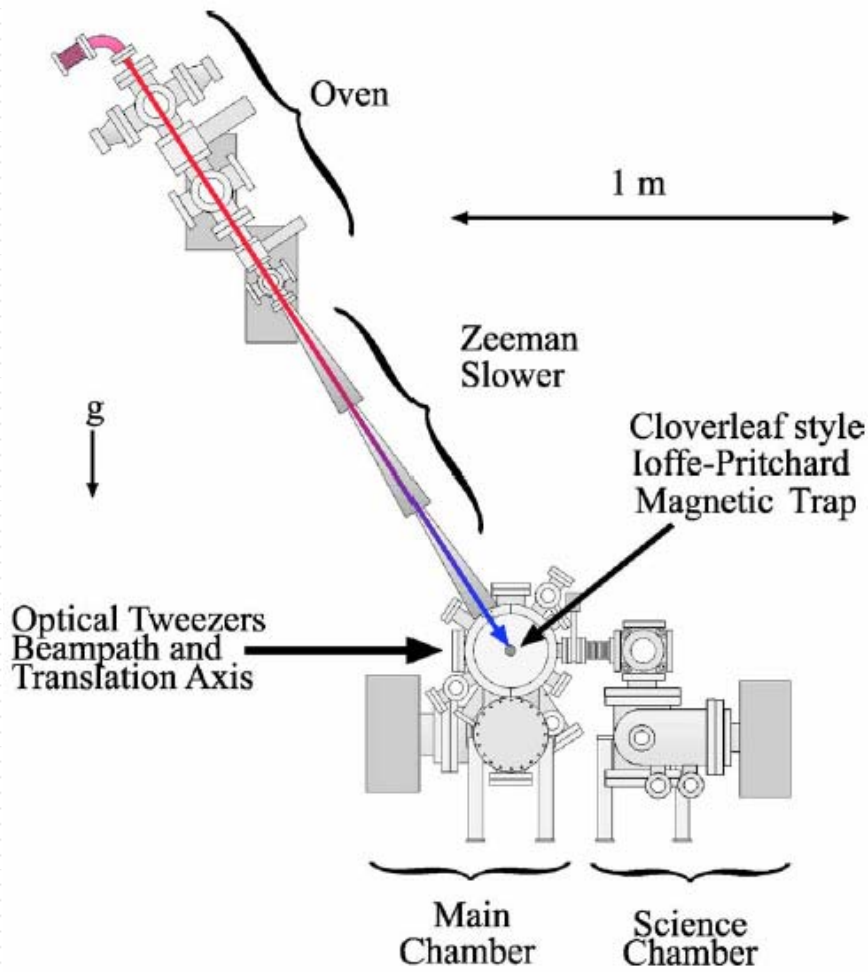
<sup>b</sup>Typical values, not measured separately.

<sup>c</sup>Chemical potential.

Quelle: [4]

# Schem. Darstellung einer BEK-Maschine

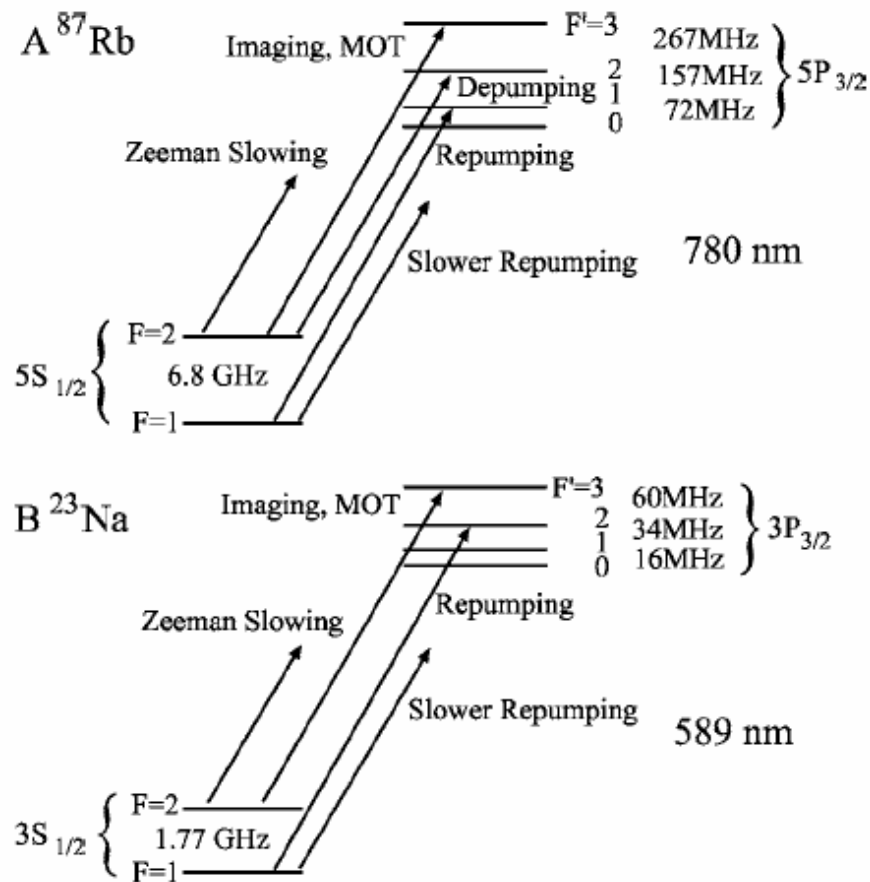
(so benutzt am MIT für  $^{87}\text{Rb}$  und  $^{23}\text{Na}$ )



- Ofen
- Zeeman-Slower
- Sechs-Strahl-MOT
- Ioffe-Pritchard-Falle
- Evaporatives Kühlen
- Transport mit opt. Pinzette in science chamber

Quelle: [4]

# Verwendete optische Übergänge

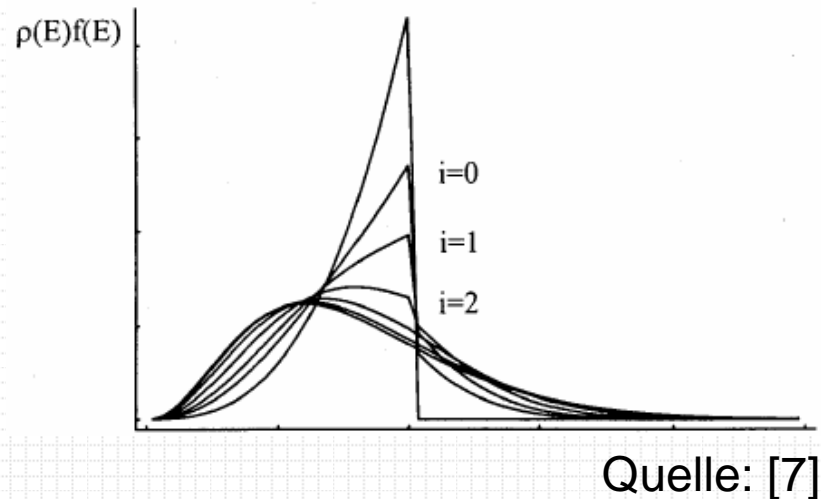
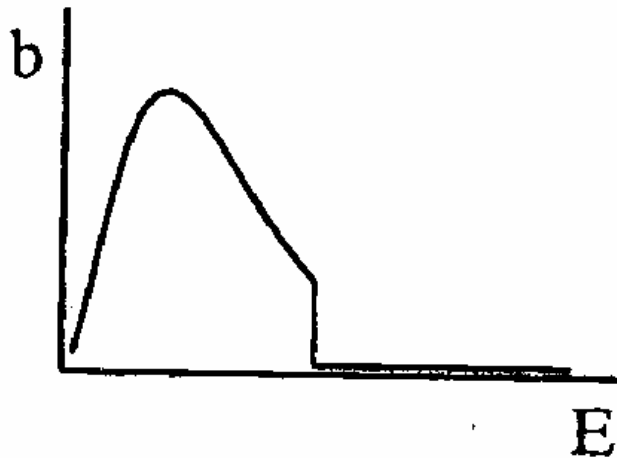


- Niveaus  $F=2$  und  $F=3$  involviert
- Übergänge für Slower, MOT und Abbildung
- Für Emissionen nach  $F=1$  Rückpumpmechanismus

Quelle: [4]

# Prinzip des evaporativen Kühlens

- Prinzip: Schwitzen
- Energie: Maxwell-Boltzmann-verteilt
- Zeemanaufspaltung abhängig von  $T$
- Rf-induzierter Übergang in ungebundenen Zustand  
=> gezieltes „abschneiden des Maxwellschwanzes“
- Nach Thermalisierung ist  $\langle E \rangle$  und damit  $T$  geringer

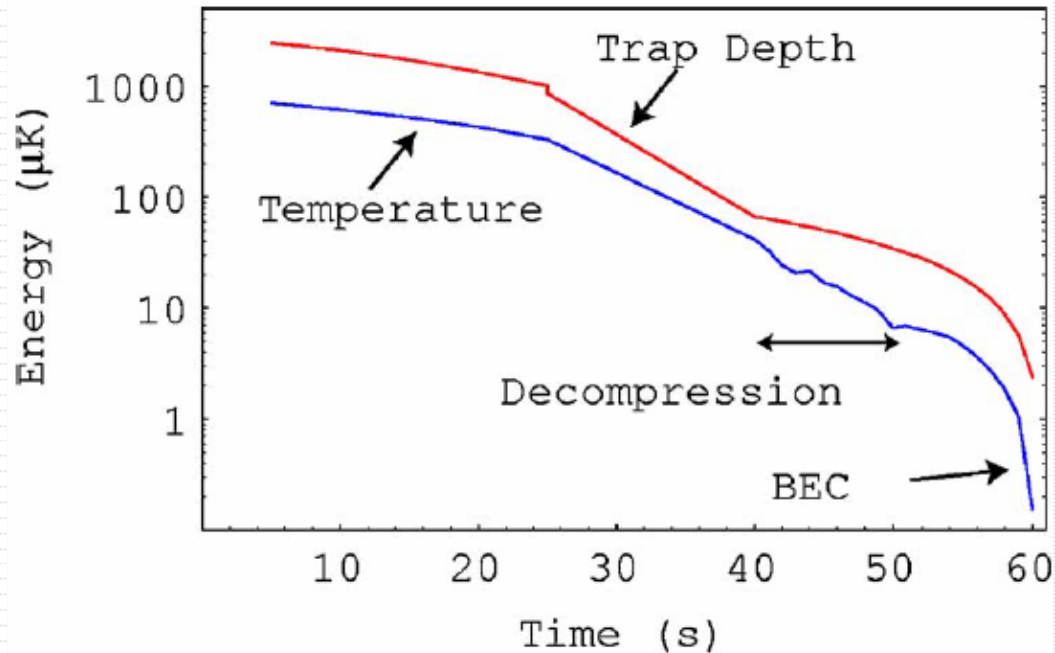


Quelle: [7]

# Effizienz des evaporativen Kühlens

- Innerhalb von 20 Sekunden können typischerweise erreicht werden:
  - Frequenz: 30MHz  $\longrightarrow$  1MHz
  - Temperatur: 500 $\mu$ K  $\longrightarrow$  1  $\mu$ K
  - #Atome:  $*10^{-2}$
  - Dichte:  $*10^3$
  - Phasenraumdichte:  $*10^7$

# Evaporatives Kühlen im Experiment



Quelle: [4]

Dekompression:

- Verringert Zahl der Drei-Körperstöße
- Anwendung kurz vor Auftreten des BEK
- Ermöglicht größere Atomzahl und längere Lebensdauer
- Wegen Anregung von Schwingungen begrenzt

# Quellen

- [1] *W. Ketterle, N.J. van Druten*; **Bose-Einstein condensation of a finite number of particles trapped in one or three dimensions**; Phys. Rev. A, Vol. 54, No. 1, 1050-2947 (1996)
- [2] *K.B. Davis et al.*; **Bose-Einstein condensation in a gas of Sodium atoms**, Phys. Rev. Letters, Vol 75., No. 22, 0031-9007 (1995)
- [3] *F. Dalfovo et al.*; **Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases**; Reviews of modern physics, vol. 71, No. 3, 0034-6861 (1999)
- [4] *E.W. Streed et al.*; **Large atom number Bose-Einstein condensate machines**; Rev. of scientific instr., 77, 023106 (2006)
- [5] [http://de.wikipedia.org/wiki/Harmonischer\\_Oszillator\\_%28Quantenmechanik%29](http://de.wikipedia.org/wiki/Harmonischer_Oszillator_%28Quantenmechanik%29)
- [6] *F. Chevy; J. Dalibard*: **Les condensats de Bose-Einstein en Rotation** Bulletin de la Société Française de Physique, n°142, décembre 2003-janvier 2004
- [7] *Albert Gröning*, **Kalte Kollisionen und Verdampfungskühlung**, Seminararbeit (2000)
- [8] *M.R. Andrews et al.*, **Observation of interferenz between two Bose Condensats**, Science, Vol. 275 (1997)
- [9] *J. Dalibard*, **La condensation de Bose-Einstein en phase gazeuse**, Images de la Physique 2001, revue éditée par le CNRS