Seminar zur Vorlesung

Mathematische Methoden II für Lehramtsstudierende

Sommer 2017 **Blatt 6** **12.06.2017**

Aufgabe 15 *3D-Integration*

Wir betrachten einen Zylinder der Höhe h und mit Radius R, der symmetrisch um den Ursprung und parallel zur z-Achse plaziert ist. Berechnen Sie seinen Schwerpunkt

$$\vec{x}_S = \frac{1}{M} \int d^3x \; \vec{x}\rho(\vec{x}), \qquad \left(M = \int d^3x \; \rho(\vec{x}) \right)$$

wenn die Dichte ρ in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) durch den Ausdruck

$$\rho(\vec{x}) = \rho_0(1 + \sin\varphi)$$

gegeben ist. (1 Punkt)

Aufgabe 16 *Satz von Stokes*

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{G}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} zy \\ xz \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie das Flächenintegral

$$\iint d\vec{A} \cdot \mathrm{rot}\vec{G}$$

für die Oberfläche einer Halbkugel mit Radius 1, die sich in der oberen Hälfte des kartesischen Koordinatensystems ($z > 0$) befindet. (1 Punkt)

b) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\oint d\vec{x} \cdot \vec{G}$$

entlang der geschlossenen Randlinie der Halbkugel aus a). (1 Punkt)

c) Warum sind die Integrale aus a) und b) für beliebige Flächen immer gleich Null, sobald ein konservatives Vektorfeld vorliegt? (1 Punkt)

Aufgabe 17 *Kommutatoren*

Die sogenannten Pauli-Matrizen sind definiert als

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Pauli-Matrizen die Beziehung

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \sigma_k$$

mit dem Levi-Civita-Symbol ε_{ijk} erfüllen $(i, j = 1, 2, 3)$. (1 Punkt)

Aufgabe 18 *Laplace-Entwicklung*

Wenn Sie das Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren/ von einer anderen Zeile subtrahieren, bleibt die Determinante einer quadratischen Matrix unverändert (analog für Spalten). Berechnen Sie damit und mit Hilfe der Laplace-Entwicklung möglichst elegant die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 3 \\ -5 & 5 & 2 & 3 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

(1 Punkt)