Seminar zur Vorlesung

Mathematische Methoden II für Lehramtsstudierende

Sommer 2017 **Blatt 9** **03.07.2017**

Aufgabe 23 *Exakte Differentialgleichung*

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die allgemeine Lösung einer exakten Differentialgleichung

$$f(x,y)\,\mathrm{d}x + g(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{1}$$

die Bedingung

$$\Phi(x, y(x)) = c$$

erfüllt, wobei $\Phi(x,y)$ eine Potentialfunktion zu f und g ist, d.h. es gilt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = f \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = g.$$

a) Bestimmen Sie die (implizite) Lösung der Differentialgleichung

$$\big(\cosh(xy) + xy\sinh(xy)\big)\,\mathrm{d}x + x^2\sinh(xy)\mathrm{d}y = 0.$$

(1 Punkt)

Damit Differentialgleichungen mit einer Form wie in Gl. (1) exakt sind, müssen die Funktionen $f(x,y)$ und $g(x,y)$ die Bedingung

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

erfüllen.
Wir betrachten nun die Differentialgleichung

$$(y+1)\mathrm{d}x - xy\mathrm{d}y = 0. \tag{2}$$

b) Zeigen Sie, dass diese Differentialgleichung nicht exakt ist, jedoch exakt wird, wenn Sie mit $\mu(x,y) = \mathrm{e}^{-y}$ durchmultipliziert wird. Man nennt $\mu(x,y)$ in diesem Fall einen integrierenden Faktor der Differentialgleichung. (1 Punkt)

c) Finden Sie nun die allgemeine (implizite) Lösung der Differentialgleichung (2). (1 Punkt)

Aufgabe 24 *Inhomogenes DGL-System*

Gegeben sei das inhomogene Differentialgleichungssystem

$$\vec{y}\,'(x) = B\vec{y}(x) + \vec{b}(x)$$

mit der Koeffizientenmatrix

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

und der Inhomogenität

$$\vec{b}(x) = \begin{pmatrix} 5\cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die homogene Lösung $\vec{y}_h(x)$ dieser Differentialgleichung. (1 Punkt)

b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\vec{y}_p(x) = \begin{pmatrix} \sin(2x) + \cos(2x) \\ \frac{1}{2}\sin(2x) \end{pmatrix}$$

eine Partikularlösung des inhomogenen Systems darstellt. (1 Punkt)

c) Wie lautet die vollständige, allgemeine Lösung des Systems? (1 Punkt)