Seminar zur Vorlesung Quantenmechanik

Sommersemester 2017 **Blatt 3** **3.05.2017**

Aufgabe 5 *Gauß'sches Wellenpaket*

Ein Teilchen mit der Masse M wird zur Zeit $t = 0$ durch die Wellenfunktion

$$\psi_0(x) = \mathcal{N} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma_0^2} + ikx\right)$$

beschrieben.

a) Wie muss der Normierungsfaktor $\mathcal{N}$ gewählt werden, damit

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\psi_0(x)|^2 \, dx = 1$$

gilt? (1 Punkt)

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Propagators

$$G(x,t|y,0) = \sqrt{\frac{M}{2\pi i\hbar t}} \; \exp\left[i\,\frac{M}{2\hbar t}\,(x-y)^2\right]$$

aus der Vorlesung die Wellenfunktion zur Zeit t und bringen Sie Ihr Ergebnis auf die Form

$$\psi(x,t) = \mathcal{N}\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+i\beta}} \; \exp\left[i\alpha x^2 - i\frac{\alpha^2}{\alpha+i\beta}\,(x-\hbar kt/M)^2\right]$$

mit

$$\alpha = \frac{M}{2\hbar t}\,, \qquad \beta = \frac{1}{4\sigma_0^2}\,.$$

(1 Punkt)

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zur Zeit t zwischen x und $x + dx$ zu finden? Welche Bedeutung hat k? Bringen Sie Ihr Ergebnis auf die Standardform einer Gaußverteilung und vergleichen Sie es mit Ihren Ergebnissen aus Aufgabe 4. (1 Punkt)

Hinweis: Für komplexes a, b mit $a \neq 0, \mathrm{Re}\, a \geq 0$ gilt

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \; \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right)\,.$$

Aufgabe 6 *Quadratische Lagrangefunktionen*

Gegeben sei eine Lagrangefunktion $L(\dot{x}, x, t)$, die höchstens quadratische Terme in $\dot{x}$ und x enthält. $x(t)$ sei diejenige Lösung der zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichung, die zur Zeit $t = t_0$ durch den Punkt x_0 und zur Zeit $t = t_1$ durch den Punkt x_1 geht. $z(t)$ sei *irgendeine* Trajektorie, die zur Zeit $t = t_0$ durch den Punkt x_0 und zur Zeit $t = t_1$ durch den Punkt x_1 geht.

a) Zeigen Sie:

$$S[z(t)] = S[x(t)] + F_z(t_1, t_0) \,.$$

Dabei ist $S[x(t)]$ bzw. $S[z(t)]$ die Wirkung entlang der Trajektorie $x(t)$ bzw. $z(t)$, während $F_z(t_1, t_0)$ eine Funktion ist, die zwar von den Zeiten t_0, t_1 und der Trajektorie $z(t)$ abhängt, aber *nicht* von den Punkten x_0 und x_1. (1 Punkt)

Hinweis: Hamilton'sches Prinzip aus der klassischen Mechanik.

b) Machen Sie sich anhand der obigen Beziehung klar, dass für Lagrangefunktionen, die höchstens quadratische Terme in $\dot{x}$ und x enthalten, der quantenmechanische Propagator $G(x_1, t_1 | x_0, t_0)$ bis auf einen (zeitabhängigen) Normierungsfaktor durch die klassische Wirkung $S[x(t)]$ bestimmt ist. Welche zusätzlichen Forderungen muss $G(x_1, t_1 | x_0, t_0)$ erfüllen? (1 Punkt)