

Seminar zur Vorlesung Quantenmechanik

Sommersemester 2017

Blatt 4

10.05.2017

Aufgabe 7 *Fresnelintegrale und Cornuspirale*

Die Fresnelintegrale $C(x)$ und $S(x)$ sind durch

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt$$

definiert.

- a) Zeigen Sie: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} C(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} S(x) = \pm \frac{1}{2}$. (1 Punkt)
- b) Die Cornuspirale ist eine ebene Kurve, die in der x - y -Ebene durch $x(t) = C(t)$, $y(t) = S(t)$ beschrieben wird. Skizzieren Sie diese Kurve und bestimmen Sie die beiden asymptotischen Punkte ($t \rightarrow \pm\infty$). (1 Punkt)

Hinweis: Verwenden Sie die Funktionen `FresnelC` und `FresnelS` aus MAPLE oder MATHEMATICA für Ihre Skizze.

Aufgabe 8 *Propagation von Wellenpaketen*

Ein freies Teilchen werde zur Zeit $t = 0$ durch die Wellenfuntion

$$\psi_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2a}} & \text{für } |x| \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

beschrieben.

- a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Propagators aus der Vorlesung $f(t) = \psi(x=0, t)$ und drücken Sie $f(t)$ durch die Fresnelintegrale $C(x)$ und $S(x)$ aus Aufgabe 7 aus. (1 Punkt)
- b) Diskutieren Sie mit Hilfe der Cornuspirale aus Aufgabe 7b den zeitlichen Verlauf von $|f(t)|^2/|f(0)|^2$. Welchen maximalen Wert erreicht dieses Verhältnis in etwa? (1 Punkt)

Aufgabe 9 *Delta-Funktion*

Wir betrachten die Funktion

$$f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\nu=0}^{N-1} e^{-2\pi i \nu x}.$$

a) Zeigen Sie:

1. $f_N(x) = \frac{e^{-i\pi(N-1)x}}{\sqrt{N}} \frac{\sin(N\pi x)}{\sin(\pi x)},$

2. $f_N(x)$ ist periodisch,

3. $f_N(n) = \sqrt{N}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ (1 Punkt)

b) Zeigen Sie:

1. $\int_{n-1/2}^{n+1/2} f_N(x) dx = \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots,$

2. $\int_{n-1/2}^{n+1/2} |f_N(x)|^2 dx = 1, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots,$

3. $\lim_{N \rightarrow \infty} |f_N(x)|^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(x - j).$ (1 Punkt)