Seminar zur Vorlesung
Quantenmechanik

Sommersemester 2017 **Blatt 6** **24.05.2017**

Aufgabe 12 *Rechenregeln für Kommutatoren*

Der Kommutator zwischen zwei Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ ist definert als $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$. Zeigen Sie:

a) $$\left[\hat{A}, c_1\hat{B}_1 + c_2\hat{B}_2 \ldots + c_n\hat{B}_n\right] = c_1\left[\hat{A}, \hat{B}_1\right] + c_2\left[\hat{A}, \hat{B}_2\right] + \ldots + c_n\left[\hat{A}, \hat{B}_n\right] ,$$

$$\left[c_1\hat{A}_1 + c_2\hat{A}_2 \ldots + c_n\hat{A}_n, \hat{B}\right] = c_1\left[\hat{A}_1, \hat{B}\right] + c_2\left[\hat{A}_2, \hat{B}\right] + \ldots + c_n\left[\hat{A}_n, \hat{B}\right] .$$

Dabei sind $c_1, c_2, \ldots, c_n$ skalare Größen. (1 Punkt)

b) $$\left[\hat{A}, \hat{B}_1\hat{B}_2\hat{B}_3 \cdots \hat{B}_n\right]$$
$$= \left[\hat{A}, \hat{B}_1\right]\hat{B}_2\hat{B}_3 \cdots \hat{B}_n + \hat{B}_1\left[\hat{A}, \hat{B}_2\right]\hat{B}_3 \cdots \hat{B}_n + \cdots + \hat{B}_1\hat{B}_2 \cdots \hat{B}_{n-1}\left[\hat{A}, \hat{B}_n\right] ,$$

$$\left[\hat{A}_1\hat{A}_2\hat{A}_3 \cdots \hat{A}_n, \hat{B}\right]$$
$$= \left[\hat{A}_1, \hat{B}\right]\hat{A}_2\hat{A}_3 \cdots \hat{A}_n + \hat{A}_1\left[\hat{A}_2, \hat{B}\right]\hat{A}_3 \cdots \hat{A}_n + \cdots + \hat{A}_1\hat{A}_2 \cdots \hat{A}_{n-1}\left[\hat{A}_n, \hat{B}\right] .$$

(1 Punkt)

c) Für den Ortsoperator $\hat{x}$ und den Impulsoperator $\hat{p}$ gilt $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$. Zeigen Sie:

$$[\hat{x}, \hat{p}^n] = i\hbar n\hat{p}^{n-1} , \quad [\hat{p}, \hat{x}^n] = -i\hbar n\hat{x}^{n-1} .$$ (1 Punkt)

Aufgabe 13 *Zeitabhängige Operatoren*

Im Heisenbergbild wird die Zeitentwicklung eines Operators $\hat{\mathcal{O}}_0$ durch $\hat{\mathcal{O}}(t) = \hat{U}^\dagger(t)\hat{\mathcal{O}}_0\hat{U}(t)$ mit einem unitären Operator $\hat{U}(t)$ beschrieben.

a) $\hat{A}_0$ und $\hat{B}_0$ seien zwei Operatoren mit dem Kommutator $\hat{C}_0 = [\hat{A}_0, \hat{B}_0]$. Zeigen Sie:

$$\left[\hat{A}(t), \hat{B}(t)\right] = \hat{C}(t) .$$

Was bedeutet das, wenn $\hat{C}_0 = [\hat{A}_0, \hat{B}_0]$ eine Zahl ist, wie z. B. beim Kommutator zwischen Orts- und Impulsoperator? (1 Punkt)

b) In der Vorlesung wurden die Heisenberg'schen Bewegungsgleichungen für das freie Teilchen gelöst. Leiten Sie daraus einen Ausdruck für die Varianz $\Delta x^2(t)$ her, der nur noch Varianzen und Erwartungswerte zur Zeit $t = 0$ enthält. Wie sieht der entsprechende Ausdruck für $\Delta p^2(t)$ aus? (1 Punkt)

Aufgabe 14 *Zustände minimaler Unschärfe*

Zustände minimaler Unschärfe werden durch Wellenfunktionen beschrieben, bei denen in der Heisenberg'schen Unschärferelation ein Gleichheitszeichen steht. Im Folgenden suchen wir Wellenfunktionen $\psi(x)$, für die $\Delta x^2 \Delta p^2 = \hbar^2/4$ gilt.

a) Bei der Herleitung der Heisenberg'schen Unschärferelation wurde an zwei Stellen eine Ungleichung verwendet. Welche Bedingungen muss eine Wellenfunktion $\psi(x)$ erfüllen, damit an beiden Stellen ein Gleichheitszeichen steht? (1 Punkt)

b) Zeigen Sie, dass nur Gaußfunktionen diese Bedingungen erfüllen, wenn man zusätzlich fordert, dass die Wellenfunktion $\psi(x)$ normierbar ist. (1 Punkt)