Seminar zur Vorlesung
Quantenmechanik

Sommersemester 2017 **Blatt 8** **7.06.2017**

Aufgabe 17 *Hermite-Polynome II*

Zeigen Sie, dass für die die Hermite-Polynome $H_n(x)$ aus Aufgabe 2 folgende Relationen gelten:

a) $$\frac{d^2H_n}{dx^2} - 2x\,\frac{dH_n}{dx} + 2nH_n = 0\,, \qquad H_n(x) = \frac{2^n e^{x^2}}{i^n\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} z^n e^{-z^2+2ixz}\,dz\,.$$ (1 Punkt)

b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n n!}\, H_n(x)\, H_n(y) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\, \exp\left[-\frac{z^2}{1-z^2}\,(x^2+y^2) + \frac{2z}{1-z^2}\,xy\right],$$

$\mathrm{Re}(1-z^2) \geq 0\,.$ (1 Punkt)

Hinweis: Vewenden Sie die Definitionen und Ergebnisse aus Aufgabe 2.

Aufgabe 18 *Eigenwerte und Eigenfunktionen von Operatoren*

Im Folgenden betrachten wir die Eigenwerte und Eigenfunktionen von hermiteschen und unitären Operatoren.

a) $\hat{A}$ sei ein hermitescher Operator. Zeigen Sie:

1. Die Eigenwerte von $\hat{A}$ sind reell,
2. Die Eigenfunktionen zu *verschiedenen* Eigenwerten sind orthogonal,
3. Der Operator $\hat{U} = e^{i\hat{A}}$ ist unitär. (1 Punkt)

b) $\hat{U}$ sei ein unitärer Operator. Zeigen Sie:

1. Die Eigenwerte von $\hat{U}$ haben den Betrag 1,
2. Die Eigenfunktionen zu *verschiedenen* Eigenwerten sind orthogonal,
3. Welche Eigenwerte und Eigenfunktionen hat $\hat{U}$, wenn $\hat{U} = e^{i\hat{A}}$ gilt und die Eigenwerte und Eigenfunktionen von $\hat{A}$ bekannt sind? (1 Punkt)