

Seminar zur Vorlesung

Quantenmechanik

Sommersemester 2017

Blatt 11

28.06.2017

Aufgabe 22 *Kontinuitätsgleichung*

Ein Teilchen mit der Masse M und der Ladung q bewege sich in einem elektromagnetischen Feld, das durch das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}, t)$ und das skalare Potential $\phi(\vec{r}, t)$ beschrieben wird. Die Schrödingergleichung für dieses System lautet

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{2M} \left[\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q\vec{A}(\vec{r}, t) \right]^2 \psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t).$$

Dabei kann das Potential $V(\vec{r}, t)$ neben dem Term $q\phi(\vec{r}, t)$ noch weitere Beiträge enthalten, z. B. das Gravitationsfeld. Zeigen Sie, dass dann

$$\frac{\partial}{\partial t} [\psi^*(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t)] + \vec{\nabla} \cdot \vec{S}(\vec{r}, t) = 0$$

gilt, wobei die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\vec{S}$ durch

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \frac{\hbar}{2Mi} \left[\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \right] - \frac{q}{M} \vec{A} \psi^* \psi \\ &= \frac{1}{2M} \left\{ \psi^* \left[\left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q\vec{A} \right) \psi \right] + \psi \left[\left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q\vec{A} \right) \psi \right]^* \right\} \end{aligned}$$

gegeben ist.

(1 Punkt)

Aufgabe 23 *Eichtransformationen*

Die Schrödingergleichung für ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld enthält das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}, t)$ und das skalare Potential $\phi(\vec{r}, t)$. Diese Potentiale sind jedoch nicht eindeutig.

- a) Zeigen Sie, dass die Potentiale $\vec{A}(\vec{r}, t)$ und $\phi(\vec{r}, t)$ und

$$\vec{A}'(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \chi(\vec{r}, t), \quad \phi'(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \chi(\vec{r}, t)$$

das gleiche elektromagnetische Feld beschreiben.

(1 Punkt)

- b) Die Wellenfunktion $\psi(\vec{r}, t)$ sei Lösung der (zeitabhängigen) Schrödingergleichung mit den Potentialen $\vec{A}(\vec{r}, t)$ und $\phi(\vec{r}, t)$. Zeigen Sie, dass dann

$$\psi'(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}, t) \exp \left[i \frac{q}{\hbar} \chi(\vec{r}, t) \right]$$

Lösung der (zeitabhängigen) Schrödingergleichung mit den den Potentialen $\vec{A}'(\vec{r}, t)$ und $\phi'(\vec{r}, t)$ ist.

(1 Punkt)

Aufgabe 24 *Tunneleffekt*

Im Folgenden betrachten wir die eindimensionale Schrödingergleichung

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2}{dx^2} + V_0 \delta(x) \right] \psi(x) = E \psi(x), \quad V_0 > 0. \quad (1)$$

- a) Die Wellenfunktion $\psi(x)$ soll bei $x = 0$ stetig sein. Leiten Sie daraus eine Sprungbedingung für die Ableitung $\psi'(x)$ bei $x = 0$ her. (1 Punkt)
- b) Lösen Sie die Schrödingergleichung (1) für den Fall, dass für $x > 0$ nur eine nach rechts laufende ebene Welle der Form $\psi(x) \propto e^{ikx}$ vorhanden ist. (1 Punkt)
- c) Überlegen Sie sich eine sinnvolle Definition für einen Reflektions- und Transmissionskoeffizienten und bestimmen Sie diese beiden Größen als Funktion von k . (1 Punkt)

Hinweis: Mit $\kappa = 2MV_0/\hbar^2$ lassen sich die Ergebnisse kompakt schreiben.