Seminar zur Vorlesung
Quantenmechanik

Sommersemester 2017 **Blatt 12** **5.07.2017**

Aufgabe 25 *Schrödingergleichung in zwei Dimensionen*

Wir betrachten die Bewegung eines Teilchens mit der Masse M in einem *zweidimensionalen*, radialsymmetrischen Potential $V(r) = -e^2/r$, wobei r durch $r = \sqrt{x^2+y^2}$ definiert ist.

a) Wie lautet der Laplace-Operator in Polarkoordinaten? Zerlegen Sie den Laplace-Operator in Radial- und Winkelanteil und bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Operators

$$\hat{L} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}\,.$$

(1 Punkt)

b) Mit Hilfe des Ansatzes $\psi(r,\varphi) = e^{im\varphi} r^\beta u(r)$ erhält man aus der zweidimensionalen, zeitunabhängigen Schrödingergleichung für $\psi(r,\varphi)$ bei geeignet gewähltem β eine eindimensionale Schrödingergleichung für $u(r)$. Wie sieht diese Schrödingergleichung aus? Welche Randbedingungen muss $u(r)$ erfüllen? (1 Punkt)

Ergebnis: $$-\frac{\hbar^2}{2M}u''(r) + \left[\frac{\hbar^2(m^2-1/4)}{2Mr^2} - \frac{e^2}{r}\right]u(r) = Eu(r)\,, \quad m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

In der Vorlesung wurden die Energie-Eigenwerte des (dreidimensionalen) Wasserstoffatoms dadurch bestimmt, dass normierbare Lösungen der Differentialgleichung

$$y''(x) + \left[-\frac{1}{4} + \frac{1-\alpha^2}{4x^2} + \frac{2n_r+\alpha+1}{2x}\right]y(x) = 0$$

gesucht wurden. Bedingung hierfür war, dass $n_r = 0, 1, 2, 3, \ldots$ gilt. Beim Wasserstoffatom in drei Dimensionen galt zwar $\alpha = 2\ell+1$, d. h. α kann ebenfalls nur ganzzahlige Werte annehmen. Das hat aber nichts mit der Normierbarkeit der Lösungen der radialen Schrödingergleichung zu tun, sondern folgt aus den Eigenschaften der Drehimpulsoperatoren.

Um die Energie-Eigenwerte für ein Teilchen im zweidimensionalen Potential $V(r) = -e^2/r$ zu bestimmen, könnten wir die Rechnung aus der Vorlesung für das dreidimensionale Wasserstoffatom im Wesentlichen wiederholen. Wir können aber auch die Schrödingergleichung für $u(r)$ mit der entsprechenden Gleichung für das dreidimensionale Wasserstoffatom vergleichen und stellen fest, dass wir nur den Term $\ell(\ell+1)$ durch $m^2-1/4$ ersetzen müssen.

c) Wie lauten die Energie-Eigenwerte für ein Teilchen im zweidimensionalen Potential $V(r) = -e^2/r$? Zeigen Sie, dass die zugehörigen Eigenfunktionen das richtige asymptotische Verhalten für $r \to 0$ haben. Vergleichen Sie die Energie des Grundzustands mit der Energie des Grundzustands in drei Dimensionen. (1 Punkt)

Aufgabe 26 *Radialer Impuls*

Wie müssen sich die Wellenfunktionen $\psi(r, \theta, \varphi)$ [Kugelkoordinaten] für $r \to 0$ verhalten, damit

$$\hat{p}_r = \frac{\hbar}{i} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r$$

ein hermitescher Operator ist? (1 Punkt)

Aufgabe 27 *Drehimpulse*

Für die Drehimpulsoperatoren $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ und $\hat{L}_z$ gilt

$$\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right] = i\hbar \hat{L}_z \,, \quad \left[\hat{L}_y, \hat{L}_z\right] = i\hbar \hat{L}_x \,, \quad \left[\hat{L}_z, \hat{L}_x\right] = i\hbar \hat{L}_y$$

bzw.

$$\left[\hat{L}_j, \hat{L}_k\right] = i\hbar \varepsilon_{jk\ell} \hat{L}_\ell \,.$$

Mit Hilfe dieser Vertauschungsrelationen sollen im Folgenden einige Eigenschaften von Drehimpulsoperatoren gezeigt werden.

a) Ein Operator $\hat{A}$ vertauscht mit $\hat{L}_x$ und $\hat{L}_y$. Zeigen Sie, dass er auch mit $\hat{L}_z$ vertauscht. (1 Punkt)

b) Ein System befinde sich in einem Zustand, der durch eine Eigenfunktion $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ von $\hat{L}^2$ und $\hat{L}_z$ beschrieben wird, d. h. es gilt

$$\hat{L}^2 \, Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \ell(\ell + 1)\hbar^2 \, Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \,, \qquad \hat{L}_z \, Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = m\hbar \, Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \,.$$

Zeigen Sie, dass für einen solchen Zustand $\langle \hat{L}_x \rangle = \langle \hat{L}_y \rangle = 0$ und $\langle \hat{L}_z \rangle = m\hbar$ gilt. (1 Punkt)